第 3 章 集合与关系

3.1 内容提要

集合与元素 讨论某一类对象时，就把这一类对象的全体称为集合。这些对象称为集合中的元素。

集合的表示 枚举法、描述法和图示法（文氏图）。

集合与元素的关系 元素和集合之间的关系是隶属关系，即属于或不属于，属于记作 $\in$，不属于记作 $\notin$。

集合与集合的关系 设 A、B 为集合，如果 B 中的每个元素都是 A 中的元素，则称 B 是 A 的子集。这时也称 B 被 A 包含，或 A 包含 B，记作 $B\subseteq A$。如果 B 不被 A 包含，则记作 $B\nsubseteq A$。设 A、B 为集合，如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称 A 与 B 相等，记作 $A=B$。如果 A 与 B 不相等，则记作 $A\neq B$。相等的符号化表示为 $A=B\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

空集 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$。空集是一切集合的子集。空集是唯一的。

定理 3.1 空集是一切集合的子集。

幂集 设 A 为集合，把 A 的全部子集构成的集合称为 A 的幂集，记作 $P(A)$。若 A 是 n 元集，则 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

集合的广义并 设 A 为集合，A 的元素的元素构成的集合称为 A 的广义并，记作 $\bigcup A$。符号化表示为 $\bigcup A=\{x\mid\exists z(z\in A\wedge x\in z)\}$。

集合的广义交 设 A 为非空集合，A 的所有元素的公共元素构成的集合称为 A 的广义交，记作 $\bigcap A$。符号化表示为 $\bigcap A=\{x\mid\forall z(z\in A\rightarrow x\in z)\}$。

定理 3.2 设 A、B、C 为任意集合，E 为包含 A、B、C 的全集，那么下列各式成立。

等幂律	$A\cup A=A$	$A\cap A=A$
交换律	$A\cup B=B\cup A$	$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$	$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
同一律	$A\cup\varnothing=A$	$A\cap E=A$
零律	$A\cap\varnothing=\varnothing$	$A\cup E=E$
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
吸收律	$A\cap(A\cup B)=A$	$A\cup(A\cap B)=A$
双重否定律	$\sim(\sim A)=A$	$\sim E=\varnothing$ $\qquad\sim\varnothing=E$
排中律	$A\cup\sim A=E$	

矛盾律　　$A\cap\sim A=\varnothing$

德·摩根律　　$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$　　$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$

$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$　　$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

补交转换律　　$A-B=A\cap\sim B$

有序对　由两个元素 x 和 y(允许 $x=y$)按一定顺序排列成的二元组称为一个有序对或序偶,记作 $<x,y>$,其中 x 是它的第一元素,y 是它的第二元素。

笛卡儿积　设 A、B 为集合,用 A 中元素为第一元素,B 中元素为第二元素构成有序对。所有这样的有序对组成的集合称为 A 和 B 的笛卡儿积,记作 $A\times B$。笛卡儿积的符号化表示为 $A\times B=\{<x,y>\mid x\in A\wedge y\in B\}$。如果 $|A|=m$,$|B|=n$,则 $|A\times B|=m\cdot n$。

笛卡儿积的运算性质

(1) 对任意集合 A,根据定义有 $A\times\varnothing=\varnothing$,$\varnothing\times A=\varnothing$。

(2) 笛卡儿积运算不满足交换律,即 $A\times B\neq B\times A$(当 $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge A\neq B$ 时)。

(3) 笛卡儿积运算不满足结合律,即 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$(当 $A\neq\varnothing\wedge B\neq\varnothing\wedge C\neq\varnothing$ 时)。

(4) 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律,即 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$,$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$,$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$,$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$。

(5) $A\subseteq C\wedge B\subseteq D\Rightarrow A\times B\subseteq C\times D$。

二元关系　如果一个集合满足以下条件之一:

(1) 集合非空,且它的元素都是有序对。

(2) 集合是空集。

则称该集合为一个二元关系,记作 R。二元关系也简称为关系。对于二元关系 R,若 $<x,y>\in R$,则记作 xRy;若 $<x,y>\notin R$,则记作 $x\not R y$。设 A、B 为集合,$A\times B$ 的任何子集称为从 A 到 B 的二元关系。特别是当 $A=B$ 时,称为 A 上的二元关系。

关系的表示方法

(1) 列举法:列举出关系的所有有序对。

(2) 关系矩阵:设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的关系,令

$$r_{ij}=\begin{cases}1 & 若\ x_iRx_j\\ 0 & 若\ x_i\not R x_j\end{cases}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则 $\boldsymbol{M}_R=\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n}\\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn}\end{bmatrix}$ 是 R 的关系矩阵,记作 $\boldsymbol{M}_R$。

(3) 关系图:设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$,R 是 A 上的关系,令图 $G=<V,E>$,其中顶点集合 $V=A$,边集为 E。对于 $\forall x_i,x_j\in V$,满足 $<x_i,x_j>\in E\Leftrightarrow x_iRx_j$,称图 G 为 R 的关系图,记作 G_R。

定义域、值域和域　设 R 是二元关系,

(1) R 中所有的有序对的第一元素构成的集合称为 R 的定义域,记作 $\mathrm{dom}R$。表示为 $\mathrm{dom}R=\{x\mid\exists y(<x,y>\in R)\}$。

(2) R 中所有有序对的第二元素构成的集合称为 R 的值域,记作 $\mathrm{ran}R$。表示为 $\mathrm{ran}R=\{y \mid \exists x(<x,y>\in R)\}$。

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的域,记作 $\mathrm{fld}R$。表示为 $\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$。

关系的复合运算 设 A、B、C 是三个任意集合,R 是集合 A 到 B 的二元关系,S 是集合 B 到 C 的二元关系,则定义关系 R 和 S 的合成或复合关系 $R\circ S=\{<a,c>\mid a\in A,c\in C\wedge\exists b\in B$,使$<a,b>\in R$ 且$<b,c>\in S\}$。

定理 3.3 设 I_A、I_B 为集合 A、B 上的恒等关系,$R=A\times B$,那么

(1) $I_A\circ R=R\circ I_B=R$。

(2) $\varnothing\circ R=R\circ\varnothing=\varnothing$。

定理 3.4 设 R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系,T 是 C 到 D 的关系,则$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$。

定理 3.5 设 F、G、H 是任意关系,则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$。

(2) $(G\cup H)\circ F=G\circ F\cup H\circ F$。

(3) $F\circ(G\cap H)\subseteq F\circ G\cap F\circ H$。

(4) $(G\cap H)\circ F\subseteq G\circ F\cap H\circ F$。

关系的逆运算 设 R 是集合 A 到 B 的二元关系,则定义一个 B 到 A 的二元关系,$R^{-1}=\{<b,a>\mid <a,b>\in R\}$,称为 R 的逆关系,记作 R^{-1}。

定理 3.6 设 R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系,则$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$。

定理 3.7 设 R 和 S 均是 A 到 B 的关系,则

(1) $(R^{-1})^{-1}=R$。

(2) $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$。

(3) $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$。

(4) $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$。

定理 3.8 设 R 是任意的关系,则

$\mathrm{dom}\,R^{-1}=\mathrm{ran}\,R$,$\mathrm{ran}\,R^{-1}=\mathrm{dom}\,R$。

关系的幂运算 设 R 为 A 上的关系,n 为自然数,则 R 的 n 次幂定义为

(1) $R^0=\{<x,x>\mid x\in A\}=I_A$。

(2) $R^{n+1}=R^n\circ R$。

定理 3.9 设 A 为 n 元集,R 是 A 上的关系,则存在自然数 s 和 t,使得 $R^s=R^t$。

定理 3.10 设 R 是 A 上的关系,$m,n\in\mathbf{N}$,则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$。

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$。

定理 3.11 设 R 是 A 上的关系,若存在自然数 s 和 $t(s<t)$使得 $R^s=R^t$,则

(1) 对任何 $k\in\mathbf{N}$ 有 $R^{s+k}=R^{t+k}$。

(2) 对任何 $k,i\in\mathbf{N}$ 有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$,其中 $p=t-s$。

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$,则对于任意的 $q\in\mathbf{N}$ 有 $R^q\in S$。

关系的性质 设 R 为集合 A 上的关系。

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow<x,x>\in R)$,则称 R 在 A 上是**自反的**。

(2) 若$\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$，则称$R$在$A$上是**反自反的**。

(3) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$，则称$R$为$A$上**对称关系**。

(4) 若$\forall x\forall y(x,y\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$，则称$R$为$A$上的**反对称关系**。

(5) 若$\forall x\forall y\forall z(x,y,z\in A\wedge\langle x,y\rangle\in R\wedge\langle y,z\rangle\in R\rightarrow\langle x,z\rangle\in R)$，则称$R$是$A$上的**传递关系**。

定理 3.12 设R为A上的关系，则

(1) R在A上自反当且仅当$I_A\subseteq R$。

(2) R在A上反自反当且仅当$R\cap I_A=\varnothing$。

(3) R在A上对称当且仅当$R=R^{-1}$。

(4) R在A上反对称当且仅当$R\cap R^{-1}\subseteq I_A$。

(5) R在A上传递当且仅当$R\circ R\subseteq R$。

关系的闭包 设R是非空集合A上的关系，R的自反(对称或传递)闭包是A上的关系R'，使得R'满足以下条件：

(1) R'是自反的(对称的或传递的)。

(2) $R\subseteq R'$。

(3) 对A上任何包含R的自反(对称或传递)关系R''，有$R'\subseteq R''$。

定理 3.13 设R为A上的关系，则有

(1) $r(R)=R\cup I_A$。

(2) $s(R)=R\cup R^{-1}$。

定理 3.14 设R为A上的关系，则有$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots\cup R^n$。

定理 3.15 设R是非空集合A上的关系，则

(1) R是自反的当且仅当$r(R)=R$。

(2) R是对称的当且仅当$s(R)=R$。

(3) R是传递的当且仅当$t(R)=R$。

定理 3.16 设R_1和R_2是非空集合A上的关系，且$R_1\subseteq R_2$，则

(1) $r(R_1)\subseteq r(R_2)$。

(2) $s(R_1)\subseteq s(R_2)$。

(3) $t(R_1)\subseteq t(R_2)$。

定理 3.17 设R是非空集合A上的关系，

(1) 若R是自反的，则$s(R)$与$t(R)$也是自反的。

(2) 若R是对称的，则$r(R)$与$t(R)$也是对称的。

(3) 若R是传递的，则$r(R)$是传递的。

集合的划分与覆盖 设A为非空集合，若A的子集族π($\pi\subseteq P(A)$，是A的子集构成的集合)满足下面的条件：

(1) $\varnothing\notin\pi$。

(2) π中任意两个子集都不相交，即$\forall x\forall y(x,y\in\pi\wedge x\neq y\rightarrow x\cap y=\varnothing)$。

(3) π中所有子集的并是A，即$\cup\pi=A$。

则称π是A的一个划分，称π中的元素为A的划分块。给定非空集合A，$T=\{T_1,T_2,\cdots,$

$T_n\}$，$T_i\subseteq A$ 且 $T_i\neq\varnothing$ $(i=1,2,\cdots,n)$，$\bigcup T_i=A$，那么集合 T 称为 A 的一个覆盖。

等价关系 设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的、对称的和传递的，则称 R 为 A 上的等价关系。设 R 是一个等价关系，若 $<x,y>\in R$，称 x 等价于 y，记作 $x\sim y$。

等价类 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，令 $\forall x\in A$，$[x]_R=\{y\mid y\in A\wedge xRy\}$，称 $[x]_R$ 为 x 关于 R 的等价类，简称为 x 的等价类，简记作 $[x]$。

定理 3.18 设 R 是非空集合 A 上的等价关系，则

(1) $\forall x\in A$，$[x]$ 是 A 的非空子集。

(2) $\forall x,y\in A$，如果 xRy，则 $[x]=[y]$。

(3) $\forall x,y\in A$，如果 $x\not R y$，则 $[x]$ 与 $[y]$ 不相交。

(4) $\bigcup\{[x]\mid x\in A\}=A$。

商集 设 R 为非空集合 A 上的等价关系，以 R 的所有等价类作为元素的集合称为 A 关于 R 的商集，记作 A/R，即 $A/R=\{[x]_R\mid x\in A\}$。

相容关系 设 R 为非空集合 A 上的关系。如果 R 是自反的、对称的，则称 R 为 A 上的相容关系。

相容类 设 R 为集合 A 上的相容关系，如果 $C\subseteq A$，如果对于 C 中任意两个元素 x_1 和 x_2 有 x_1Rx_2，则称 C 是由相容关系 R 产生的相容类。

最大相容类 设 R 为集合 A 上的相容关系，不能真包含在任何其他相容类中的相容类称为最大相容类。

定理 3.19 设 R 为有限集合 A 上的相容关系，C 是一个相容类，那么必存在一个最大相容类 C_r，使得 $C\subseteq C_r$。

偏序关系 设 R 为非空集合 A 上的关系，如果 R 是自反的、反对称的和传递的，则称 R 为 A 上的偏序关系。集合 A 和 A 上的偏序关系 $\preccurlyeq$ 一起称为**偏序集**，记作 $<A,\preccurlyeq>$。

可比与不可比 设 R 为非空集合 A 上的偏序关系，如果 $a\preccurlyeq b$ 或 $b\preccurlyeq a$，则称 a 和 b 是**可比的**。如果既没有 $a\preccurlyeq b$ 也没有 $b\preccurlyeq a$，则称 a 和 b 是**不可比的**。

哈斯图作图法

(1) 以圆圈表示元素；

(2) 若 $x\prec y$，则 y 画在 x 的上层；

(3) 若 y 覆盖 x，则连线；

(4) 不可比的元素可画在同一层。

偏序中特殊元素 设 $(A,\preccurlyeq)$ 是偏序集，集合 $B\subseteq A$，特殊元有

(1) 如存在元素 $b\in B$，使得 $\forall a\in B$，均有 $a\preccurlyeq b$，则称 b 为 B 的最大元。

(2) 如存在元素 $b\in B$，使得 $\forall a\in B$，均有 $b\preccurlyeq a$，则称 b 为 B 的最小元。

(3) 若存在元素 $b\in B$，$\forall a\in B$，如 $b\preccurlyeq a$，则 $a=b$，称 b 为 B 的极大元。

(4) 若存在元素 $b\in B$，$\forall a\in B$，如 $a\preccurlyeq b$，则 $a=b$，称 b 为 B 的极小元。

(5) a 为 B 的上界 $\Leftrightarrow a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\preccurlyeq a)$。

(6) a 为 B 的下界 $\Leftrightarrow a\in A\wedge\forall x(x\in B\rightarrow a\preccurlyeq x)$。

(7) 如果 C 是 B 的所有上界的集合，即 $C=\{y\mid y$ 是 B 的上界$\}$，则 C 的最小元 a 称为 B 的最小上界或上确界。

(8) 如果 C 是 B 的所有下界的集合，即 $C=\{y\mid y$ 是 B 的上界$\}$，则 C 的最大元 a 称为

B 的最大下界或下确界。

定理 3.20（包含排斥原理） 对有限集合 A 和 B，有 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$。

3.2 例题精选

例 3.1 判断下列属于和包含关系是否正确。

(1) $\varnothing\subseteq\varnothing$。

(2) $\varnothing\in\varnothing$。

(3) $\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$。

(4) $\varnothing\in\{\varnothing\}$。

(5) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$。

(6) $\{a,b\}\in\{a,b,c,\{a,b\}\}$。

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$。

(8) $\{a,b\}\in\{a,b,\{\{a,b\}\}\}$。

(9) 若 $a\subseteq A$，$A\subseteq P(B)$，则 $a\subseteq P(B)$。

(10) 若 $a\in A$，$A\in P(B)$，则 $a\in P(B)$。

解：(1)、(3)、(4)、(5)、(6)、(7)、(9)为真，其余为假。由空集是任何集合的子集，所以(1)、(3)为真。判断元素是否属于集合，是要检查元素作为一个整体是否在集合中出现，不难判断(4)、(6)为真。判断集合 $A\subseteq B$，需要依次检查 A 的每个元素是否在 B 中出现，不难判断(5)、(7)为真。根据包含具有传递性，属于是不能传递的，因此判断(9)为真，(10)为假。另外，也可以用文氏图或包含的谓词定义来判断。

例 3.2 证明：$(A-B)-C=(A-C)-(B-C)=A-B\cup C$。

证明：证明两个集合相等有三种方法，利用集合恒等式、利用集合相等的定义以及利用文氏图。本题仅用前两种方法解题。

方法一：利用集合恒等式。

$$\begin{aligned}
(A-B)-C &=(A\cap\sim B)\cap\sim C && \text{(补交转换)}\\
&=A\cap(\sim B\cap\sim C) && \text{(结合律)}\\
&=A\cap\sim(B\cup C) && \text{(德·摩根律)}\\
&=A-B\cup C && \text{(补交转换)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(A-C)-(B-C) &=(A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C) && \text{(补交转换)}\\
&=(A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C) && \text{(德·摩根律)}\\
&=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C) && \text{(分配律)}\\
&=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup\varnothing && \text{(矛盾律、零律)}\\
&=A\cap\sim(B\cup C) && \text{(同一律)}\\
&=A-B\cup C && \text{(补交转换)}
\end{aligned}$$

方法二：利用集合相等的定义，互为子集则相等。即要证 $A=B$，任取 x，然后完成推理过程：$x\in A\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow x\in B$。

$$\begin{aligned}
x\in(A-B)-C &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\Leftrightarrow x\in A-C\wedge x\notin B
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow x\in(A-C)-B\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A-B\cup C\\
x\in(A-B)-C&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\
&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C)\vee(x\in A\wedge x\notin C\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\wedge(x\notin B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-C)\wedge\neg(x\in B\wedge x\notin C)\\
&\Leftrightarrow x\in A-C\wedge x\notin(B-C)\\
&\Leftrightarrow x\in(A-C)-(B-C)
\end{aligned}
$$

例 3.3 列出集合 $A=\{2,3,4\}$上的恒等关系 I_A,全域关系 E_A,小于或等于关系 L_A,整除关系 D_A。若$|A|=n$,则 A 上有多少个不同的二元关系?I_A 中有多少个有序对?E_A 中有多少个有序对?

解:$I_A=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$。

$E_A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,2>,<3,3>,<3,4>,<4,2>,<4,3>,<4,4>\}$。

$L_A=\{<2,2>,<2,3>,<2,4>,<3,3>,<3,4>,<4,4>\}$。

$D_A=\{<2,2>,<3,3>,<4,4>,<2,4>\}$。

根据关系的定义及关系有序对个数知,A 上有 2^{n^2} 个不同的二元关系,I_A 中有 n 个有序对,E_A 中有 n^2 个有序对。

例 3.4 设 $A=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>\}$,$B=\{<1,3>,<2,4>,<4,2>\}$,求:$A\cup B$,$A\cap B$,$\mathrm{dom}A$,$\mathrm{dom}B$,$\mathrm{dom}(A\cup B)$,$\mathrm{ran}A$,$\mathrm{ran}B$,$\mathrm{ran}(A\cap B)$,$\mathrm{fld}(A-B)$,A^{-1},$A\circ B$,B^3。

解:此题涉及的知识点是关系的基本运算。

$A\cup B=\{<1,2>,<2,4>,<3,3>,<1,3>,<4,2>\}$。

$A\cap B=\{<2,4>\}$。

$\mathrm{dom}A=\{1,2,3\}$。

$\mathrm{dom}B=\{1,2,4\}$。

$\mathrm{dom}(A\cup B)=\{1,2,3,4\}$。

$\mathrm{ran}A=\{2,3,4\}$。

$\mathrm{ran}B=\{2,3,4\}$。

$\mathrm{ran}(A\cap B)=\{4\}$。

$A-B=\{<1,2>,<3,3>\}$。

$\mathrm{fld}(A-B)=\{1,2,3\}$,$A^{-1}=\{<2,1>,<4,2>,<3,3>\}$。

$A\circ B=\{<1,4>,<2,2>\}$。

$B^3=\{<2,2>,<4,4>\}\circ B=\{<2,4>,<4,2>\}$。

例 3.5 证明关系的包含和相等。

(1) $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

(2) 设 R 是 A 到 B 的关系,S 是 B 到 C 的关系,T 是 C 到 D 的关系,则$(R\circ S)\circ T=$

$R\circ(S\circ T)$。

(3) 设 R_1 和 R_2 是 A 上的关系，证明 $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$。

证明：关系的包含和相等的方法与证明集合的包含和相等类似。

(1) 任取 $(x,y)\in(A-B)\times(C-D)\Rightarrow x\in(A-B)\wedge y\in(C-D)$（根据笛卡儿积定义）

$$\Rightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\wedge(y\in C\wedge y\notin D)$$
$$\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)\wedge(x,y)\notin(B\times D)$$
$$\Rightarrow(x,y)\in(A\times C)-(B\times D)$$

所以，$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

(2) 任取 $<x,w>\in((R\circ S)\circ T\Leftrightarrow\exists z(<x,z>\in R\circ S\wedge<z,w>\in T)$（复合运算的定义）

$$\Leftrightarrow\exists z(\exists y(<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\wedge<z,w>\in T)$$
$$\Leftrightarrow\exists z\exists y((<x,y>\in R\wedge<y,z>\in S)\wedge<z,w>\in T)$$
$$\Leftrightarrow\exists y\exists z(<x,y>\in R\wedge(<y,z>\in S\wedge<z,w>\in T))$$
$$\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in R\wedge\exists z(<y,z>\in S\wedge<z,w>\in T))$$
$$\Leftrightarrow\exists y(<x,y>\in R\wedge<y,w>\in S\circ T)$$
$$\Leftrightarrow<x,w>\in R\circ(S\circ T)$$

所以，$(R\circ S)\circ T=R\circ(S\circ T)$，即关系的复合运算满足结合律。

(3) 因为 $R_1\subseteq R_1\cup R_2$，$R_2\subseteq R_1\cup R_2$，由定理 3.16 可知 $r(R_1)\subseteq r(R_1\cup R_2)$，$r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$，从而有 $r(R_1)\cup r(R_2)\subseteq r(R_1\cup R_2)$。反之，由 $R_1\subseteq r(R_1)$，$R_2\subseteq r(R_2)$，得 $R_1\cup R_2\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$，又知道 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 是自反的，即 $r(R_1)\cup r(R_2)$ 是包含 $R_1\cup R_2$ 的自反关系，根据闭包的最小性，从而得到 $r(R_1\cup R_2)\subseteq r(R_1)\cup r(R_2)$。根据集合相等的定义，得到 $r(R_1\cup R_2)=r(R_1)\cup r(R_2)$。

例 3.6 分析定义在集合 $A=\{1,2,3\}$ 上的下列关系具有哪些性质。

(1) $R_1=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<3,3>\}$。

(2) $R_2=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<2,3>\}$。

(3) $R_3=\varnothing$。

(4) $R_4=A\times A$。

解：(1) R_1 具有反对称性、传递性。因为 $<2,2>\notin R_1$，所以 R_1 不具有自反性。因为 $<1,1>,<3,3>\in R_1$，所以 R_1 不具有反自反性。因为 $<1,2>\in R_1$，$<2,1>\notin R_1$，所以 R_1 不具有对称性。

(2) R_2 具有反对称性。因为 $<1,2>,<2,3>\in R_2$，而 $<1,3>\notin R_2$，所以 R_2 不具有传递性。

(3) R_3 具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。注意，空关系是一个特殊的关系，关于空关系有以下性质：空集上的空关系具有自反性、对称性、反对称性和传递性。非空集合上的空关系具有反自反性、对称性、反对称性和传递性。

(4) R_4 全关系具有自反性、对称性、传递性。

例 3.7 (1) 设 $A=\{1,2,\cdots,8\}$，如下定义 A 上的关系 R：$R\equiv\{<x,y>|x,y\in A\wedge x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)\}$，其中 $x\equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$ 表示 x 与 y 模 3 相等，验证 R 为 A 上的等价关系。

(2) 设 R 是集合 A 上的关系，令 $S=\{<a,b>|\exists c\in A$，使得 aRc，cRb$\}$。证明：若 R 是 A 上的等价关系，则 S 也是 A 上的等价关系。

解:(1) 因为$\forall x \in A$,有$x \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$,所以关系$R$具有自反性。

$\forall x, y \in A$,若$x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$,则有$y \equiv x(\mathrm{mod}\ 3)$,所以关系$R$具有对称性。

$\forall x, y, z \in A$,若$x \equiv y(\mathrm{mod}\ 3)$,$y \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$,则有$x \equiv z(\mathrm{mod}\ 3)$,所以关系$R$具有传递性。

由等价关系的定义可知R为A上的等价关系。

关系R的关系图如图3-1所示。

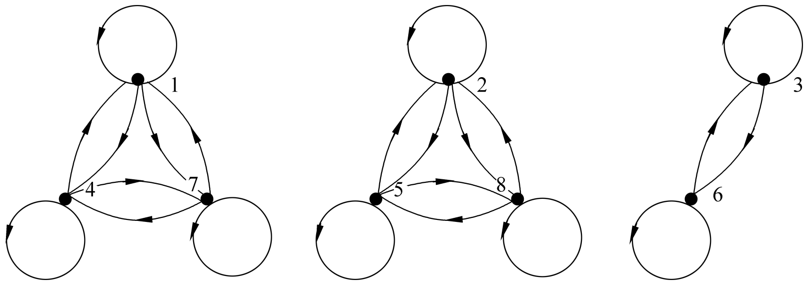

图3-1 例3.7关系R的关系图

不难看出,图3-1关系图被分为三个互不相连通的部分。每部分中的数两两都有关系,不同部分中的数则没有关系。每一部分中的所有的顶点构成一个等价类,$[1]=[4]=[7]=\{1,4,7\}$,$[2]=[5]=[8]=\{2,5,8\}$,$[3]=[6]=\{3,6\}$。

(2) 证明:因为R是A上的等价关系,所以R是自反的、对称的和传递的。

$\forall a \in A$,因为R自反,所以$<a,a> \in A$。取$c=a$,$<a,a> \in S$,故S是自反的。

$\forall <a,b> \in S$,存在$c \in A$,使得$<a,c> \in R$,$<c,b> \in R$。因为R对称,所以$<b,c> \in R$,$<c,a> \in R$,$<b,a> \in S$,故S是对称的。

$\forall <a,b>,<b,e> \in S$,存在$c,d \in A$,使得$<a,c> \in R$,$<c,b> \in R$,$<b,d> \in R$,$<d,e> \in R$。因为$R$传递,所以$<a,b> \in R$,$<b,e> \in R$,$<a,e> \in S$,故$S$是传递的。

由等价关系的定义S,也是A上的等价关系。

例3.8 分别画出下列各偏序集$<A, \preccurlyeq>$的哈斯图,并找出A的极大元、极小元、最大元和最小元。

(1) $A=\{a,b,c,d,e\}$,$\preccurlyeq=\{<a,d>,<a,c>,<a,b>,<a,e>,<b,e>,<c,e>,<d,e>\} \cup I_A$。

(2) $A=\{a,b,c,d,e\}$,$\preccurlyeq=\{<c,d>\} \cup I_A$。

解:利用偏序集哈斯图作图法:①以圆圈表示元素;②若$x \prec y$,则y画在x的上层;③若y覆盖x,则连线;④不可比的元素可画在同一层。由此可得到哈斯图,如图3-2所示。

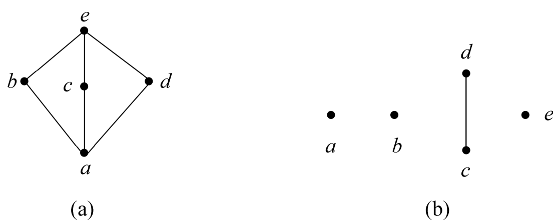

图3-2 例3.8哈斯图

图 3-2(a)对应(1),其极大元是 e,极小元是 a,最大元是 e,最小元是 a。图 3-2(b)对应(2),其极大元是 a、b、d、e,极小元是 a、b、c、e,没有最大元和最小元。

例 3.9 在 Sharp EL-506S 计算器上,2^{30} 的值为 1 073 741 820。如果这个值是正确的,那么 $2^{28}=2^{30}/4$ 的最后一位一定是 5。显然,2 的幂不可能是奇数,所以 2^{30} 的最后一位是错误的。那么,2^{30} 的最后一位数字是什么?

解:两个正整数有相同的个位数当且仅当它们模 10 同余,但在 Z_{10} 中,$[2^{30}]=[2^5]^6=[32]^6=[2]^6=[2^6]=[64]=[4]$,因此,$2^{30}$ 的最后一位为 4。实际上,$2^{30}=1\ 073\ 741\ 824$。

3.3 应用案例

3.3.1 同余关系在出版业中的应用

同余经常应用于检错码。本例将描述这种编码在出版业中的应用。从 1972 年开始,世界上任何地方出版的图书都带有一个 10 位的数字编码,这个编码称为国际标准书号(International Standard Book Number,ISBN)。例如,Spence 和 Vanden Eynden 撰写的《有限数学》的 ISBN 是 0-673-38582-5。这种编号给图书提供了一个标准的标识,相对于用作者、标题和版本来标识每本书的方法,这种方法使出版商和书店可以更容易地将库存和记账过程计算机化。

一个 ISBN 由 4 部分组成:组号、出版商号、出版商指定的标识号、校验位。在 ISBN 0-673-38582-5 中,组号 0 表示这本书是在英语国家(澳大利亚、加拿大、新西兰、南非、英国或美国)出版的,673 标识出版商,第三组数字 38582 在该出版商所出版的所有书中标识出这本书,最后一位数字 5 是校验位,用于检测复制和传送 ISBN 过程中产生的错误。利用校验位,出版商常可以检测出错误的 ISBN,从而避免由错误的订单所导致的昂贵的运输费。

校验位有 11 种可能的值:0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 或 X(X 代表 10)。校验位是按下列方法计算出来的:分别用 10、9、8、7、6、5、4、3 和 2 乘以 ISBN 的前 9 位,并将这 9 个乘积相加得到 y,校验位 d 是满足 $y+d\equiv 0 \pmod{11}$ 的数字。例如,《有限数学》的校验位为 5,因为

$$\begin{aligned}&10\times0+9\times6+8\times7+7\times3+6\times3+5\times8+4\times5+3\times8+2\times2\\&=0+54+56+21+18+40+20+24+4=237\end{aligned}$$

而 $237+5=242\equiv 0 \pmod{11}$。

类似地,Rob Callan 所著图书 *Artificial Intelligence* 的 ISBN 是 0-333-80136-9。这里,校验位是 9,因为

$$\begin{aligned}&10\times0+9\times3+8\times3+7\times3+6\times8+5\times0+4\times1+3\times3+2\times6\\&=0+27+24+21+48+0+4+9+12=145\end{aligned}$$

而 $145+9=154\equiv 0 \pmod{11}$。

通过同余关系产生的校验位可以发现 ISBN 码的单位错误。

证明:假设 $x_1,x_2,\cdots,x_{10}$ 变成 $y_1,y_2,\cdots,y_{10}$,只改变其中的第 i 位,即 $y_i\neq x_i$,而 $y_k=x_k(k\neq i)$。

假设 $x_i>y_i$,则存在整数使得 $x_i=y_i+a$,其中 $1\leqslant a\leqslant 10$。

因此

$$
\begin{aligned}
&1y_1+2y_2+3y_3+4y_4+5y_5+6y_6+7y_7+8y_8+9y_9+10y_{10}\\
&=1x_1+\cdots+(i-1)\ x_{i-1}+iy_i+(i+1)\ x_{i+1}+\cdots+10x_{10}\\
&=1x_1+\cdots+(i-1)\ x_{i-1}+ix_i+i(-a)+(i+1)\ x_{i+1}+\cdots+10x_{10}\\
&=\sum ix_i+i(-a)
\end{aligned}
$$

注意到 $\sum ix_i \equiv 0 \bmod (11)$,这是因为

$$
\begin{aligned}
&1x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9\\
&\equiv x_{10} \bmod (11)
\end{aligned}
$$

则必有

$$
\begin{aligned}
&1x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5+6x_6+7x_7+8x_8+9x_9+10x_{10}\\
&\equiv 0 \bmod (11)
\end{aligned}
$$

如果 $y_1,y_2,\cdots,y_{10}$是正确的 ISBN 号,则 $\sum iy_i \equiv 0 \bmod (11)$。

由此 $i(-a)\equiv 0 \bmod (11)$,则 $11|ia$,但是 $1\leqslant i\leqslant 10$,$1\leqslant a\leqslant 10$,不可能,故 $y_1,y_2,\cdots,y_{10}$不是正确的 ISBN 号。

3.3.2 拓扑排序在建筑工序中的应用

问题描述:建造一所房屋所需要的各项任务所需的天数及其直接的前继任务如表 3-1 所示。如果所有的任务由一组每次只能进行一项任务的人来完成,那么这些任务应该以怎样的顺序来完成?通过同时进行某些任务,多少天内可以完成所有的任务?

表 3-1 一组建筑任务所需的天数及其直接的前继任务

任　务	天数	前继任务	任　务	天数	前继任务
A 场地准备	4	没有	H 电气设施	3	E
B 地基	6	A	I 绝缘	2	G,H
C 排水设施	3	A	J 幕墙	6	F
D 骨架	10	B	K 墙纸	5	I,J
E 屋顶	5	D	L 清洁和油漆	3	K
F 窗	2	E	M 地板和装修	4	L
G 管道	4	C,E	N 检验	10	I

解答:在这个建筑项目中,某些任务只有等到别的任务完成后才能开始。例如,任务 G 即铺设管道只有等到任务 C 和 E 完成后才可以开始。另外还有一些条件在表 3-1 中没有明确地表示出来,如任务 G 只有等任务 A、B、C、D 和 E 都完成后才能开始,这是因为任务 E 必须等任务 D 完成后才能开始,而任务 D 必须在任务 B 完成后才能开始,任务 B 又必须等待任务 A 结束。在图 3-3 中考察任务之间的所有依赖关系更容易,其中任务 X 到任务 Y 的箭头表示任务 Y 必须在任务 X 及其之前的所有任务都完成后才可以开始。

通过约定所有的箭头由左指向右,从而省略图 3-3 中的所有箭头,则所得到的图如图 3-4

所示。

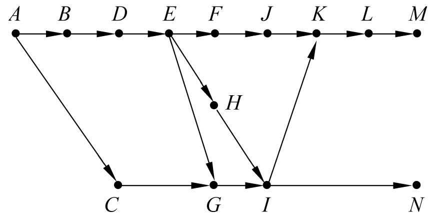

图 3-3　建筑工序图(1)

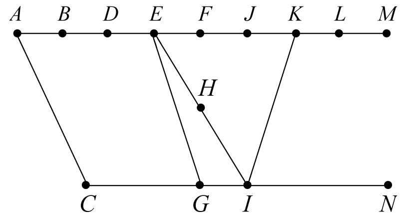

图 3-4　建筑工序图(2)

由于任务必须依次地完成,所以要在任务集合上寻找一个包含原偏序 R(图 3-5 所示的哈斯图描述了 R,等同于图 3-4)的全序 T。即希望得到一个全序 T,满足 $R\subseteq T$。

为了说明拓扑排序算法的使用,需要为建筑的例子中的任务集合 S 构造一个全序,这个例子包含给定的偏序。从图 3-5 所示的哈斯图可以看出,A 是 S 的唯一的极小元。因此,取 $s_1=$A,并从 S 中删除 A。与这个新的集合对应的哈斯图如图 3-6 所示。这里,B 和 C 都是极小元,可以任意地选择其中的一个,假设取 $s_2=$C。对应于新集合的哈斯图如图 3-7 所示。因为 B 是这个新集合中唯一的极小元,所以取 $s_3=$B。

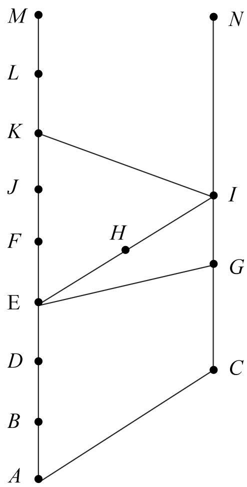

图 3-5　建筑工序哈斯图(1)

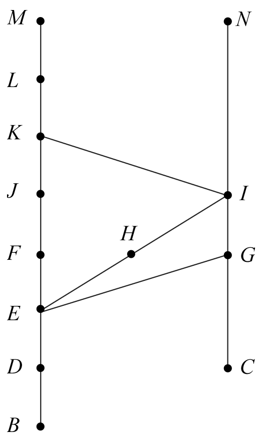

图 3-6　建筑工序哈斯图(2)

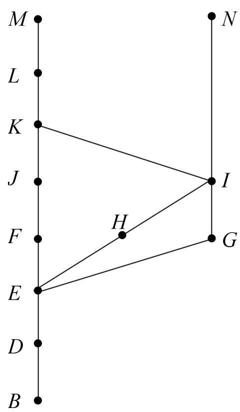

图 3-7　建筑工序哈斯图(3)

按照这种方式继续,选取 $s_4=$D,$s_5=$E,$s_6=$G,$s_7=$H,$s_8=$I,$s_9=$F,$s_{10}=$J,$s_{11}=$N,$s_{12}=$K,$s_{13}=$L,$s_{14}=$M。于是,A、C、B、D、E、G、H、I、F、J、N、K、L、M 就是一个这样的序列:它包含了任务的给定的偏序,且任务可按照它来进行。

当然,可能还会有其他同类序列,因为在算法的各个阶段,步骤 2 中可能存在多个可供选择的极小元。另一个可能的序列是 A、B、D、E、F、J、C、H、G、I、K、L、M、N。每一个这样的序列都对应于一个 S 中的任务的全序,它包含了给定的偏序,并且是这样形成的一个序关系:定义 X 与 Y 是相关联的当且仅当 $X=Y$ 或 X 在序列中出现在 Y 之前。

通过同时进行某些任务,在 45 天内就可以完成所有的任务(从而完全造好房屋)。计算过程略。

3.3.3 等价关系在软件测试等价类划分中的应用

问题描述:给定一程序,从对话框中读取三个整数值,其数据范围是1~200。这三个整数值代表了三角形三条边的长度。程序输出信息,指出该三角形究竟是不规则三角形、等腰三角形还是等边三角形,或者不构成三角形。运用等价类概念,设计测试用例。

解答:

算法分析:给集合{a,b,c}赋值分类如下。

1 存在输入值不在有效范围的情况或者输入的边长个数不对的情况

1.1 有一个输入值无效(某边的长度为负数,或者为0,或者为非整数(如2.5))

(又可以细分为)

1.1.1 a无效

1.1.2 b无效

1.1.3 c无效

1.2 有两个输入值无效

(又可以细分为)

1.2.1 a、b无效

1.2.2 a、c无效

1.2.3 b、c无效

1.3 三个输入值均无效

1.4 输入的边长个数不对(如仅输入了两个数)

2 不存在输入值不在有效范围的情况(即输入值均在有效范围)

2.1 构成三角形的情况(两边之和大于第三边)

2.1.1 三个元素均不相等(不规则三角形)

2.1.2 两个元素相等(等腰三角形,三种情况:①3,3,4;②3,4,3;③4,3,3)

2.1.3 三个元素均相等(等边三角形)

2.2 不构成三角形的情况

2.2.1 三个元素值均不相等

2.2.2 两边之和等于第三边(如①1,2,3;②1,3,2;③3,1,2)

2.2.3 两边之和小于第三边(如①1,2,4;②1,4,2;③4,1,2)

按上述安排设计测试用例输入,此外除了定义输入值,是否定义了程序针对该输入值的预期输出值?

用例设计如下。

(1)一般等价类测试用例,如表3-2所示。

表3-2 一般等价类测试用例

测试用例	a	b	c	预期输出
WN1	5	5	5	等边三角形
WN2	2	2	3	等腰三角形
WN3	3	4	5	不等边三角形
WN4	4	1	2	非三角形

(2)a、b、c 中有一个无效值的等价类测试用例,如表3-3所示。

表 3-3　a、b、c 中有一个无效值的等价类测试用例

测试用例	a	b	c	预期输出
WR1	−1	5	5	a 取值不在所允许的取值值域内
WR2	5	−1	5	b 取值不在所允许的取值值域内
WR3	5	5	−1	c 取值不在所允许的取值值域内
WR4	201	5	5	a 取值不在所允许的取值值域内
WR5	5	201	5	b 取值不在所允许的取值值域内
WR6	5	5	201	c 取值不在所允许的取值值域内

（3）a、b、c 中有二个及三个无效值的等价类测试用例，如表 3-4 所示。

表 3-4　a、b、c 中有二个及三个无效值的等价类测试用例

测试用例	a	b	c	预期输出
WS1	−1	−1	5	a、b 取值不在所允许的取值值域内
WS2	5	−1	−1	b、c 取值不在所允许的取值值域内
WS3	−1	5	−1	a、c 取值不在所允许的取值值域内
WS4	−1	−1	−1	a、b、c 取值不在所允许的取值值域内

说明： 等价划分是一种黑盒测试方法，它将程序的输入划分为若干数据类，从中生成测试用例。等价划分试图定义一个测试用例以期发现一类错误，由此减少所需设计测试用例的总数。

等价划分的测试用例设计是基于对输入条件的等价类的评估。等价类表示输入条件的一组有效的或无效的状态。通常情况下，输入条件要么是一个特定值、一个数据域、一组相关的值，要么是一个布尔值。可以根据下述指导原则定义等价类。

① 若输入条件指定一个范围，则可以定义一个有效和两个无效的等价类。

② 若输入条件需要特定的值，则可以定义一个有效和两个无效的等价类。

③ 若输入条件指定集合的某个元素，则可以定义一个有效和一个无效的等价类。

④ 若输入条件为布尔值，则可以定义一个有效和一个无效的等价类。

通过运用设计等价类的指导原则，可以为每个输入域数据对象设计测试用例并执行它。选择测试用例以便可以一次测试一个等价类的尽可能多的属性。

3.4　习题解答

3.1　判定下列断言的对错。

（1）$a \in \{\{a\}\}$。

（2）$\{a\} \subseteq \{a, b, c\}$。

（3）$\varnothing \in \{a, b, c\}$。

（4）$\varnothing \subseteq \{a, b, c\}$。

（5）$\{a, b\} \subseteq \{a, b, c, \{a, b, c\}\}$。

(6) $\{\{a\},1,3,4\}\subset\{\{a\},3,4,1\}$。

(7) $\{a,b\}\subseteq\{a,b,\{a,b\}\}$。

(8) 如果 $A\cap B=B$,则 $A=E$。

解:(1) ×。 (2) √。 (3) ×。 (4) √。 (5) √。 (6) ×。 (7) √。 (8) ×。

3.2 (1) 将“大于3而小于或等于7的整数集合”用集合表示出来。

(2) 将“小于10的素数”集合表示出来。

解:(1) $\{x\mid x>3\wedge x\leqslant 7\wedge x\in\mathbf{Z}\}$或$\{4,5,6,7\}$。

(2) $\{x\mid x<10\wedge x$ 是素数$\}$或$\{2,3,5,7\}$。

3.3 若 A、B 都是集合,那么 A 能同时既是 B 的元素又是 B 的子集吗?举例说明。

解:可以。例如,$A=\{a\}$,$B=\{\{a\},a,b,c\}$。

3.4 化简下列集合表达式。

(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)$。

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A$。

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)$。

(4) $(A\cap B)-(C-(A\cup B))$。

解:(1) $((A\cup B)\cap B)-(A\cup B)=B-(A\cup B)=B\cap\sim(A\cup B)=B\cap\sim A\cap\sim B=\varnothing$。

(2) $((A\cup B\cup C)-(B\cup C))\cup A=((A\cup B\cup C)\cap\sim(B\cup C))\cup A=A$。

(3) $(B-(A\cap C))\cup(A\cap B\cap C)=(B\cap\sim(A\cap C))\cup(B\cap(A\cap C))=B\cap E=B$。

(4) $(A\cap B)\cap\sim(C\cap\sim(A\cup B))=(A\cap B)\cap(\sim C\cup A\cup B)=((A\cap B)\cap\sim C)\cup((A\cap B)\cap(A\cup B))=((A\cap B)\cap\sim C)\cup(A\cap B)=A\cap B$。

3.5 写出下列集合的子集。

(1) $A=\{a,\{b\},c\}$。

(2) $B=\{\varnothing\}$。

(3) $C=\varnothing$。

解:(1) $\varnothing,\{a\},\{\{b\}\},\{c\},\{a,\{b\}\},\{a,c\},\{\{b\},c\},\{a,\{b\},c\}$。

(2) $\varnothing,\{\varnothing\}$。

(3) $\varnothing$。

3.6 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,3,5\}$,求:$A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$,$B-A$,$A\oplus B$。

解:$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$。

$A\cap B=\{2,3\}$。

$A-B=\{1,4\}$。

$B-A=\{5\}$。

$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=\{1,4,5\}$。

3.7 设全集 $E=\mathbf{N}$,有下列子集:$A=\{1,2,8,10\}$,$B=\{n\mid n^2<50,n\in\mathbf{N}\}$,$C=\{n\mid n$ 可以被3整除,且 $n<20,n\in\mathbf{N}\}$,$D=\{n\mid n=2^i,i<6$ 且 $i,n\in\mathbf{N}\}$。求下列集合。

(1) $A\cup(C\cap D)$。

(2) $A\cap(B\cup(C\cap D))$。

(3) $B-(A\cap C)$。

(4) $(\sim A\cap B)\cup D$。

解：(1) $A\cup(C\cap D)=A\cup\varnothing=A=\{1,2,8,10\}$。

(2) $A\cap(B\cup(C\cap D))=A\cap(B\cup\varnothing)=A\cap B=\{1,2\}$。

(3) $B-(A\cap C)=B-\varnothing=\{n\mid n^2<50,n\in\mathbf{N}\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$。

(4) $(\sim A\cap B)\cup D=\{0,3,4,5,6,7\}\cup\{1,2,4,8,16,32\}=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,16,32\}$。

3.8 设 $A=\{x,y,\{x,y\},\varnothing\}$。求下列各式的结果。

(1) $A-\{x,y\}$。

(2) $\{\{x,y\}\}-A$。

(3) $\varnothing-A$。

(4) $A-\{\varnothing\}$。

(5) $P(A)$。

解：(1) $\{\{x,y\},\varnothing\}$。

(2) $\varnothing$。

(3) $\varnothing$。

(4) $\{x,y,\{x,y\}\}$。

(5) $\{\varnothing,\{x\},\{y\},\{\varnothing\},\{\{x,y\}\},\{x,y\},\{x,\varnothing\},\{y,\varnothing\},\{x,\{x,y\}\},\{\{x,y\},y\},\{\{x,y\},\varnothing\},\{x,y,\varnothing\},\{\{x,y\},x,\varnothing\},\{\{x,y\},y,\varnothing\},\{\{x,y\},x,y\},\{\{x,y\},x,y,\varnothing\}\}$。

3.9 已知 $A=\{a,\{a\}\}$。求：$P(A)$，$P(P(A))$。

解：$P(A)=\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}$。

$P(P(A))=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{a\}\},\{\{\{a\}\}\},\{\{a,\{a\}\}\},\{\varnothing,\{a\}\},\{\varnothing,\{\{a\}\}\},\{\varnothing,\{a,\{a\}\}\},\{\{a\},\{\{a\}\}\},\{\{a\},\{a,\{a\}\}\},\{\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\},\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\}\},\{\varnothing,\{a\},\{a,\{a\}\}\},\{\varnothing,\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\},\{\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\},\{\varnothing,\{a\},\{\{a\}\},\{a,\{a\}\}\}\}$，共 16 个元素。

3.10 设 A 和 B 分别表示整数 1985 和 1986 的正因子集，而 $P(A)$和 $P(B)$分别表示 A 和 B 的幂集。求：

(1) $P(A)\cap P(B)$。

(2) $P(A)-P(B)$的基数。

(3) $P(B)-P(A)$的基数。

解：首先用枚举法表示集合 $A=\{1,5,397,1985\}$和集合 $B=\{1,2,3,6,331,1986\}$。

(1) $P(A)\cap P(B)=\{\varnothing,\{1\}\}$。

(2) $2^4-2=14$。

(3) $2^6-2=62$。

3.11 令 $x=\{\{2,5\},4,\{4\}\}$，求：$\bigcap(\bigcup x-4)$。

解：$\bigcup x=\{2,5,0,1,3,4\}$，$\bigcup x-4=\bigcup x-\{0,1,2,3\}=\{4,5\}$，$\bigcap(\bigcup x-4)=4$。

3.12 证明：(1) $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$。

(2) $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$。

证明:(1) 若任意取 $x\in P(A)\cup P(B)$,则 $x\in P(A)$或 $x\in P(B)$,于是 $x\subseteq A$ 或 $x\subseteq B$,所以 $x\subseteq A\cup B$,即 $x\in P(A\cup B)$,于是有 $P(A)\cup P(B)\subseteq P(A\cup B)$。

(2) 若任意取 $x\in P(A)\cap P(B)$,则 $x\in P(A)$且 $x\in P(B)$,于是 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$,所以 $x\subseteq A\cap B$,即 $x\in P(A\cap B)$,于是有 $P(A)\cap P(B)\subseteq P(A\cap B)$。反过来,若任意取 $x\in P(A\cap B)$,则 $x\subseteq A\cap B$,所以 $x\subseteq A$ 且 $x\subseteq B$,即 $x\in P(A)$且 $x\in P(B)$,于是有 $x\in P(A)\cap P(B)$,即 $P(A\cap B)\subseteq P(A)\cap P(B)$,所以 $P(A)\cap P(B)=P(A\cap B)$。

3.13 令 $x=\{\{\{1,2\},\{1\}\},\{\{1,0\}\}\}$。求:$\cup x$,$\cap x$,$\cup\cap x$,$\cap\cap x$,$\cup\cup x$,$\cap\cup x$。

解:$\cup x=\{\{1,2\},\{1\},\{1,0\}\}$。

$\cap x=\varnothing$。

$\cup\cap x=\varnothing$。

$\cap\cap x$ 无定义。

$\cup\cup x=\{1,2,0\}$。

$\cap\cup x=\{1\}$。

3.14 证明:$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$。

证明:$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)\cap(A\cap\sim A)\cap(\sim A\cup\sim B)=(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)=(A\cup B)\cap\sim(A\cap B)=(A\cup B)-(A\cap B)$。

3.15 试证明对任意集合 A、B、C,等式$(A-B)\cup(A-C)=A$ 成立的充分必要条件是 $A\cap B\cap C=\varnothing$。

证明:若$(A-B)\cup(A-C)=A$,则$(A-B)\cup(A-C)=A-(B\cap C)$,即 $A-(B\cap C)=A$,任取 $x\in A$ 则 $x\notin(B\cap C)$,综上 $A\cap B\cap C=\varnothing$。若 $A\cap B\cap C=\varnothing$,则任取 $x\in A$ 有 $x\notin(B\cap C)$,因此,$x\in A-(B\cap C)$。所以 $A\subseteq A-(B\cap C)$,另一方面 $A-(B\cap C)\subseteq A$ 显然成立,所以 $A-(B\cap C)=A$,即$(A-B)\cup(A-C)=A$ 成立。

3.16 (1) 若 $A-B=B$,问 A、B 分别是什么集合?请说明理由。

(2) 证明:$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$。

解:(1) $B=\varnothing$,$A=\varnothing$时,$A-B=B$。

如果 $x\in A-B$,则 $x\in A\wedge x\notin B$,而 $A-B=B$,得到 $x\in B$,矛盾。

因此,$B=A-B=\varnothing$,$A-B=A-\varnothing$,从而,$A=\varnothing$。

(2)
$$\begin{aligned}x\in(A-B)-C&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\&\Leftrightarrow x\in A-C\wedge x\notin B\\&\Leftrightarrow x\in(A-C)-B\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\&\Leftrightarrow x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\&\Leftrightarrow x\in A-(B\cup C)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x\in(A-B)-C&\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B\wedge x\notin C)\vee(x\in A\wedge x\notin C\wedge x\in C)\\&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin C)\ \wedge(x\notin B\vee x\in C)\\&\Leftrightarrow x\in(A-C)\ \wedge\neg(x\in B\wedge x\notin C)\\&\Leftrightarrow x\in A-C\wedge x\notin(B-C)\\&\Leftrightarrow x\in(A-C)-(B-C)。\end{aligned}$$

3.17 用谓词公式对集合 A 和 B 证明：$A-(A\cap B)=A-B$。

证明：任取 $x\in A-(A\cap B)$，即 $x\in A\wedge x\notin A\cap B$，即 $x\in A\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$，即 $(x\in A\wedge x\notin B)\vee F$，即 $x\in A-B$。所以 $A-(A\cap B)\subseteq A-B$。另一方面 $A\cap B\subseteq B$，所以 $A-B\subseteq A-(A\cap B)$，原命题得证。

3.18 (1) 证明："A 为有限集"等价于"A 的任何子集为有限集"。

(2) 说明在下列各条件下集合 A 与 B 有什么关系，或者 A 与 B 是什么集合。

① $A\cap B=A$。

② $A-B=B-A$。

③ $(A-B)\cup(B-A)=A$。

证明：(1) 充分性显然。必要性：设 $|A|=n$，$B\subseteq A$，则 $|B|\leqslant|A|=n$，所以 B 为有限集。

(2) ①$A\subseteq B$。　②$A=B$。　③$B=\varnothing$，A 任意。

3.19 计算或简单回答以下各题，其中 A、B 为任意集合。

(1) $\bigcup\{A\}$。

(2) $P(\{\varnothing,1\})$。

(3) $\{1,2\}\times\{a,b,c\}$。

(4) $A\oplus B=\varnothing$ 的充要条件是什么？

(5) A 与 $P(A)$ 等势吗？

解：(1) A。

(2) $\{\varnothing,\{1\},\{\varnothing\},\{\varnothing,1\}\}$。

(3) $\{<1,a>,<1,b>,<1,c>,<2,a>,<2,b>,<2,c>\}$。

(4) 充要条件是 $A=B$。

(5) 不等势。

3.20 假设 A、B、C 为集合，证明：$(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

证明：任取 $<x,y>\in(A-B)\times(C-D)$，则 $x\in(A-B)$，$y\in(C-D)$（根据笛卡儿积的定义），即 $x\in A$ 且 $x\notin B$，$y\in C$ 且 $y\notin D$，$<x,y>\in(A\times C)$，$<x,y>\notin(B\times D)$，所以 $<x,y>\in(A\times C)-(B\times D)$，即 $(A-B)\times(C-D)\subseteq(A\times C)-(B\times D)$。

3.21 设集合 $A=\{a,b\}$，$B=\{1,2,3\}$，$C=\{d\}$。求：$A\times B\times C$ 和 $B\times A$。

解：$A\times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\}$。

$A\times B\times C=\{<<a,1>,d>,<<a,2>,d>,<<a,3>,d>,<<b,1>,d>,<<b,2>,d>,<<b,3>,d>\}$。

$B\times A=\{<1,a>,<1,b>,<2,a>,<2,b>,<3,a>,<3,b>\}$。

3.22 证明：如果 $X=\{0\}$，$Y=\{0\}$，$Z=\{1\}$，则 $(X\times Y)\times Z\neq X\times(Y\times Z)$。

证明：因为 $(X\times Y)\times Z=\{<<0,0>,1>\}$，$X\times(Y\times Z)=\{<0,<0,1>>\}$，而 $<0,0>\neq 0$，所以 $(X\times Y)\times Z\neq X\times(Y\times Z)$。

3.23 设集合 $A=\{1,2,3\}$，用列举法给出 A 上的恒等关系 I_A，全关系 E_A，A 上的小于关系 $L_A=\{<x,y>|x,y\in A\wedge x<y\}$ 及其关系矩阵。

解：　恒等关系 $I_A=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>\}$。

全关系 $E_A=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,$

$<3,3>\}$。

小于关系 $L_A=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>\}$。

I_A 的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$。

E_A 的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$。

L_A 的关系矩阵为$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$。

3.24 设集合 $A=\{1,2,3\}$,$R1$ 与 $R2$ 是 A 上的二元关系分别为

$R1=\{<1,1>,<1,2>,<2,2>,<3,2>,<3,3>\}$。

$R2=\{<1,1>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<1,3>,<3,3>\}$。

(1) 试分别写出 $R1$、$R2$ 的关系矩阵。

(2) 分别画出 $R1$、$R2$ 的关系图。

(3) 判定 $R1$、$R2$ 个具有关系的哪几种性质。

解:(1) R_1 的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$;$R_2$ 的关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$。

(2) R_1 和 R_2 的关系图如图 3-8 所示。

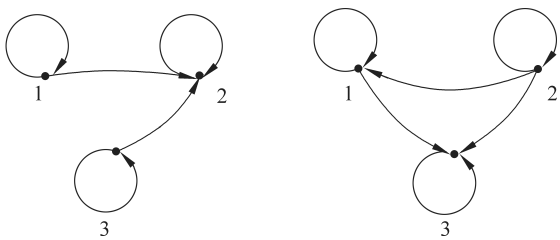

图 3-8 题 3.24 R_1 和 R_2 的关系图

(3) R_1 具有自反性、反对称性、传递性;R_2 具有自反性、反对称性、传递性。

3.25 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$,试求 A 上的模 2 同余关系 R 的关系矩阵和关系图。

解:$R=\{<1,1>,<1,3>,<1,5>,<2,2>,<2,4>,<3,1>,<3,3>,<3,5>,<4,2>,<4,4>,<5,1>,<5,3>,<5,5>\}$。

关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\end{bmatrix}$。

关系图如图 3-9 所示。

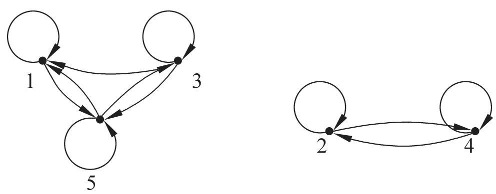

图 3-9　题 3.25 的关系图

3.26　设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，A 上的二元关系为

$R_1=\{<1,1>,<1,3>,<1,4>,<2,4>,<3,3>,<4,4>\}$。

$R_2=\{<1,2>,<1,3>,<2,3>,<4,4>\}$。

$R_3=\{<1,1>,<2,2>,<3,3>,<4,4>\}$。

求：$R_1\cap R_2$，$R_2\cup R_3$，$\sim R_1$，R_1-R_3，$R_1\circ R_2$。

解：$R_1\cap R_2=\{<1,3>,<4,4>\}$。

$R_2\cup R_3=\{<1,1>,<1,2>,<1,3>,<2,2>,<2,3>,<3,3>,<4,4>\}$。

$\sim R_1=\{<1,2>,<2,1>,<2,2>,<2,3>,<3,1>,<3,2>,<3,4>,<4,1>,<4,2>,<4,3>\}$。

$R_1-R_3=\{<1,3>,<1,4>,<2,4>\}$。

$R_1\circ R_2=\{<1,2>,<1,3>,<1,4>,<2,4>,<4,4>\}$。

3.27　设集合 $Z=\{a,b,c,d\}$上有如下关系。

$R_1=\{<a,a>,<a,b>,<b,d>\}$。

$R_2=\{<a,d>,<b,c>,<b,d>,<c,b>\}$。

试给出关系$((R_1\circ R_2)^{-1})^2$ 的关系矩阵和关系图，并说明它具有什么性质以及理由。

解：$R_1\circ R_2=\{<a,d>,<a,c>\}$，$(R_1\circ R_2)^{-1}=\{<d,a>,<c,a>\}$，$((R_1\circ R_2)^{-1})^2=\varnothing$。它具有反自反、对称、反对称和可传递性。关系矩阵为元素全为 0 的 4×4 矩阵，关系图为只有 4 个顶点、没有边的平凡图。

3.28　给定集合 $A=\{0,1,2,3\}$，且 A 中有关系为

$R_1=\{<i,j>\mid(i,j\in A)\wedge((j=i+1)\vee(j=i/2))\}$。

$R_2=\{<i,j>\mid(i,j\in A)\wedge(i=j+2)\}$。

试写出合成关系 $R_2\circ R_1$ 的如 R_1 或 R_2 的形式的集合表示式。

解：$R_1=\{<0,1>,<1,2>,<2,3>,<2,1>\}$，$R_2=\{<2,0>,<3,1>\}$，$R_2\circ R_1=\{<1,0>,<2,1>\}$。

3.29　设集合 $A=\{2,3,4\}$，$B=\{4,6,7\}$，$C=\{8,9,12,14\}$，R_1 是 A 到 B 的二元关系，R_2 是由 B 到 C 的二元关系。定义：$R_1=\{<a,b>\mid a$ 是素数且 a 整除 $b\}$，$R_2=\{<b,c>\mid b$ 整除 $c\}$。求复合关系 $R_1\circ R_2$，并用关系矩阵表示。

解：$R_1\circ R_2=\{<2,8>,<2,12>,<3,12>\}$。

$R_1\circ R_2$ 关系矩阵为$\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$。

3.30　设R_1、R_2 和R_3 分别是从 A 到 B、从 B 到 C 和从 C 到 D 的关系。证明：$(R_1\circ R_2)\circ R_3=$