第5章

集　合

集合语言是描述现代数学知识的必不可少的工具。本章在给出集合语言基本术语的基础上，介绍定义和描述集合的基本方法，包括元素枚举法、性质概括法、文氏图和成员关系表，然后讨论集合的运算，以及集合等式的证明。基本集合通过集合运算构成集合表达式，可用于描述复杂的集合。集合等式的证明实际上是证明不同的集合表达式描述的是同一集合。因此，本章的核心主题是如何描述集合，这是集合论作为语言工具描述现代数学所需的最基础知识。

Set-Basic(1)

Set-Basic(2)

Set-Basic(3)

5.1　集合的基本概念

本节给出有关集合的一些基本术语，介绍定义集合的基本方法，即元素枚举法和性质概括法，并介绍文氏图 (venn diagram) 和集合成员关系表 (membership table)。文氏图可以认为是描述集合的一种简单直观的图形方法，而成员关系表是描述集合及其元素之间隶属关系的一种表格方法。文氏图可以帮助人们直观地确定一个集合表达式所描述的集合，而成员关系表可以帮助人们证明最基本的集合等式。

5.1.1　集合的基本术语

集合是现代数学的基本概念，但也是一个很难准确定义的概念。集合论的奠基人，德国数学家康托尔 (G. Cantor 1845—1918) 认为凡是一堆东西 (a collection of things) 都可称为集合。现在把以这种观点建立的集合论称为朴素集合论 (naive set theory)。朴素集合论会导致悖论 (paradox)。因此，人们后来发展出了公理集合论 (axiomatic set theory)，以多条公理的形式界定什么是集合以排除在朴素集合论中可能导致悖论的集合，然后再推演集合论的其他内容。

我们只介绍朴素集合论中最基础的内容。因此，采用朴素集合论的观点，认为凡是放在一起作为整体进行研究的一堆东西是集合。假定在研究某个问题时，其中要研究的最基本的不再分解的东西的全体构成了一个集合，这个集合称为**全集** (universal set)，通常记为 U。简单地说，假定存在全集 U，这使得在实际研究中可持朴素集合论观点而不导致悖论。

集合是作为整体研究的一堆东西，这些东西的每一个称为该集合的**元素** (element)。通常使用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示集合，小写字母 $a, b, c, \cdots$ 表示元素。元素 a **属于** (belongs to) 集合 A 记为 $a \in A$。元素 a 不属于集合 A 则记为 $a \notin A$。注意，元素和集合是相对的，元素属于集合，集合包含元素，集合的元素也还可以是集合。

朴素集合论认为集合的元素是确定的，即对一个元素 a，要么 $a \in A$，要么 $a \notin A$，二者必居其一。集合的元素之间没有顺序，也不重复。

到这里给出了集合、全集、元素、属于这些没有严格定义的基本概念，利用这些基本概念，下面使用逻辑语言严格地定义集合的其他基本术语，包括子集、空集和集合相等。实际上，以后主要是借助逻辑语言给出概念的严格定义。

定义 5.1 对于两个集合 A 和 B，如果 A 的每个元素都属于 B，则称 A 是 B 的**子集** (subset)，B 是 A 的**超集** (super set)，或称 A **包含于** (be included in)B，B **包含** (include) A，记为 $A \subseteq B$，或 $B \supseteq A$。也即

$$A \subseteq B \quad \text{当且仅当} \quad \forall x(x \in A \to x \in B)$$

这里个体变量 x 的论域是全集 U。

根据子集关系的定义，很容易证明下面的定理。

定理 5.1 （1）对任意集合 A，有 $A \subseteq A$。

（2）子集关系是传递的，即对任意集合 A, B, C，若 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq C$，则 $A \subseteq C$。

读者后面可能会注意到，在讨论集合语言时，可能的研究对象不仅包括 U 的元素而且还包括 U 的所有子集。或者说，在用一阶逻辑公式定义集合论的一些术语或概念时，其中个体变量的取值不仅可能是 U 的元素，还可能是 U 的子集，也即个体变量的论域不仅包括 U，还包括 U 的所有子集。我们把这个论域作为讨论集合语言，包括集合、函数与关系等内容时的全总域，并记为 $\mathcal{U}$。

不过多数时候，读者无须考虑论域到底是全集 U 还是全总域 $\mathcal{U}$，只需要知道，集合的元素仍然可以是集合，在强调集合的元素可能是集合的情况下，才需要考虑使用全总域 $\mathcal{U}$。通常，特别地称一个集合为**集合族** (a family of sets)，如果它的所有元素也都是集合。

定义 5.2 对于两个集合 A 和 B，如果对任意元素 x，$x \in A$ 当且仅当 $x \in B$，则称集合 A 和 B **相等**，记为 $A = B$。也即

$$A = B \quad \text{当且仅当} \quad \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

定义 5.2 基于朴素集合论的**外延原则** (principle of extensionality)，即两个集合只要有相同的元素则认为是相等的集合，而不考虑集合名字本身的内涵。在哲学或语言学中，一个概念（名字）的外延是它所指称的对象，而内涵是它的本质属性，也即它有别于其他概念的属性的全体。例如，“《朝花夕拾》的作者”和“《狂人日记》的作者”内涵不同（给了我们不同信息），但外延相同。对于集合，它的外延就是它包含的所有元素，而内涵则视具体的应用而定，所以将元素相同则集合相等这项原则称为外延原则。

根据双蕴涵逻辑等值式，即 $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$，并比较集合相等和子集关系的定义，容易得到下面的定理。

定理 5.2　对于两个集合 A 和 B，$A = B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$。

当 A 是 B 的子集但不等于 B 时，称 A 是 B 的**真子集** (proper set)，记为 $A \subset B$，即 $A \subset B$ 当且仅当 $A \subseteq B$ 且 $A \neq B$。

定义 5.3　不包含任何元素的集合称为**空集** (empty set)，记为 $\varnothing$。也就是说，空集是使得命题 $\forall x(x \notin \varnothing)$ 成立的集合。

显然，根据蕴涵式前件为假则整个蕴涵式总是为真的特点可得到下面的定理。

定理 5.3　空集是任何集合的子集，即对任意集合 A，$\varnothing \subseteq A$。

定理 5.4　空集是唯一的，即对任意集合 A，如果 A 也满足 $\forall x(x \notin A)$，则 $A = \varnothing$。

证明　显然，若 A 也满足 $\forall x(x \notin A)$，则对任意集合 B 也有 $A \subseteq B$，从而 $A \subseteq \varnothing$，而又有 $\varnothing \subseteq A$，因此 $A = \varnothing$。 □

5.1.2　定义集合的基本方法

在使用集合语言研究应用问题时，首先可能需要给出一些集合的定义。例如，数学基础的研究通常从自然数集的定义开始，然后扩展至整数集、有理数集及实数集；研究命题逻辑，需要先定义命题逻辑公式集；研究程序设计语言，需要先定义程序中可以出现的符号集等。

人们将定义集合的方法分为**元素枚举法**、**性质概括法**和**归纳定义法**。在介绍证明方法时，已经介绍了集合的归纳定义法，即在归纳基给出集合的基本元素，然后在归纳步给出一些规则从集合已有元素构造更多元素。自然数集、命题逻辑公式集都可使用归纳法定义。归纳定义法适合编写计算机程序自动地构造集合的元素。这里讨论更为简单直接的元素枚举法和性质概括法。

定义集合的元素枚举法是基于朴素集合论的外延原则，将一个集合的所有元素一一地罗列出来而定义该集合。这适合在元素比较少，或者在可以按照明显的规律罗列元素时定义集合。

例子 5.1　下面是使用元素枚举法定义集合的例子。

（1）小于 10 的正整数集合：$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$。

（2）C++ 程序标识符可出现的符号集：$\{\mathrm{A}, \cdots, \mathrm{Z}, \mathrm{a}, \cdots, \mathrm{z}, 1, \cdots, 9, \_\ \}$。

（3）2 的所有非负整数幂构成的集合：$\{1, 2, 4, 8, \cdots\}$。

集合定义的元素枚举法使用左右花括号括住集合的所有元素，元素之间使用逗号分隔。如果罗列的元素有明显规律，可使用省略号省略其中的部分元素。

定义集合的性质概括法使用谓词概括一个集合的所有元素所满足的共同性质而定义该集合，通常使用下面的形式定义集合 A：

$$A = \{x \mid P(x)\}$$

其中，用花括号表明是对集合的定义，竖线前面的 x 给出集合元素的形式，后面的谓词

$P(x)$ 概括集合元素 x 所共同满足的性质。这个定义意味着，对任意 x，$x \in A$ 当且仅当 $P(x)$ 为真，因此也称 A 为谓词 $P(x)$ 的**真值集** (truth set)。

朴素集合论认为任意的谓词都可概括定义一个集合，但这一点被发现可能会导致悖论。著名的罗素悖论利用性质 $x \notin x$ 定义集合：

$$S = \{x \mid x \notin x\}$$

这时如果不明确 x 的论域，或者说如果 x 的论域可以包括 S 自己的话，那么会导出悖论，因为如果谓词 $x \notin x$ 可作用于这样定义的 S，那么是否有 $S \in S$？如果 $S \notin S$，则根据 S 的定义，$S \in S$，而如果 $S \in S$，则同样根据 S 的定义，又应该有 $S \notin S$，也即 $S \in S$ 不是非真即假的命题而是悖论。由于罗素悖论使用的性质只用到集合论最基本的“元素属于集合”这个概念，从而对朴素集合论的冲击非常大。罗素悖论的通俗形式称为“理发师悖论”：一个理发师声称他一定给且只给他那个村庄中不给自己理发的人理发，但问题是，他是否应该给自己理发？他自己也是这个村庄的人。

公理集合论引入**子集分离公理**来避免悖论，即只允许下面形式的性质概括法定义集合 A：

$$A = \{x \in B \mid P(x)\}$$

其中，已知 B 是一个集合。简单地说，子集分离公理只允许通过谓词，从已知的集合中分离出一些元素，这些元素满足这个谓词从而定义了一个集合，也即在给出性质 $P(x)$ 用于定义集合时，x 的论域限定为一个已知的集合 B。

我们假定存在全集 U 正是基于这一点，即在使用谓词 $P(x)$ 定义集合时，如果没有明确给出 x 的论域，则总假定它的论域是全集 U。我们说 U 是所研究问题中的最基本的不再分割的东西构成的集合，即对属于 U 的元素 x 都有 $x \notin x$，这样 $S = \{x \mid x \notin x\}$ 意味着 $S = U$，而总有 $U \notin U$，因为 U 本身不是最基本的不再分割的东西，也不属于 x 的论域。实际上，在具体研究中通常都是利用某个性质从已知的集合分离出子集，而且也很少会遇到像 $x \notin x$ 这样奇怪的性质。

例子 5.2 下面是使用性质概括法定义集合的例子。

（1）小于 10 的正整数集合：$\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 10\}$。

（2）2 的所有非负整数幂构成的集合：$\{x \mid \exists k \in \mathbb{N}(x = 2^k)\}$。

注意，这里一阶公式 $\exists k \in \mathbb{N}(x = 2^k)$ 是公式 $\exists k(k \in \mathbb{N} \wedge x = 2^k)$ 的简写形式，对于前者可直接认为 k 的论域是 $\mathbb{N}$，对于后者则认为 k 的论域是全集 U，而 $k \in \mathbb{N}$ 是特征谓词。这种将特征谓词直接与量词写在一起的形式很常见，不过这时要注意全称量词的特征谓词与后面给出性质的谓词是逻辑蕴涵关系，而存在量词的特征谓词与后面给出性质的谓词是逻辑合取关系。例如，公式 $\forall n \geqslant 8(P(n))$ 是 $\forall n(n \geqslant 8 \rightarrow P(n))$ 的简写，而 $\exists n \geqslant 8(P(n))$ 是 $\exists n(n \geqslant 8 \wedge P(n))$ 的简写。

在使用性质概括法定义集合时，为简便起见，也通常使用下面的形式定义集合 A：

$$A = \{f(x) \mid P(x)\}$$

这里 $f(x)$ 是包含 x 的一个函数（或说表达式）。注意，这样定义意味着，对任意元素 x，有：

$$x \in A \quad \text{当且仅当} \quad \exists y(x = f(y) \ \wedge \ P(y))$$

如果读者对一阶公式中个体变量的辖域与约束出现很熟悉的话，应该不会因为上面定义 A 时使用 $f(x)$，这里又说 $x \in A$ 而感到迷惑。也许可以使用约束变量改名，换一个变量名更容易理解：即上述集合 A 的定义意味着，对任意元素 y，$y \in A$ 当且仅当存在 x 使得 $y = f(x)$ 且 $P(x)$ 成立。

通过在竖线前面写表达式或函数，可用下面更简便的形式定义 2 的所有非负整数幂构成的集合：

$$\{2^k \mid k \in \mathbb{N}\}$$

这里并没有引入一个字母作为这个集合的名字。定义集合时没有要求一定要给集合起一个简短的名字。通常只是对那些重要的、常用的集合用固定的字母命名，例如自然数集 $\mathbb{N}$、整数集 $\mathbb{Z}$、有理数集 $\mathbb{Q}$、实数集 $\mathbb{R}$ 等，很多集合我们只是临时用一个字母命名，甚至不命名。

问题 5.3　设全集 U 是整数集 $\mathbb{Z}$。定义集合 A：

$$A = \{x^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$$

（1）使用元素枚举法给出 A。

（2）判断下面逻辑公式的真值：

① $\forall x(x \in A \leftrightarrow \exists y(0 \leqslant y \leqslant 5 \ \wedge \ x = y^2))$　　② $\forall x(0 \leqslant x \leqslant 5 \to x^2 \in A)$

③ $\forall x(x^2 \in A \to 0 \leqslant x \leqslant 5)$　　④ $\forall x(x^2 \in A \wedge 0 \leqslant x \leqslant 5)$

【解答】（1）使用元素枚举法给出 A 很简单，有：

$$A = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2\} = \{0, 1, 4, 9, 16, 25\}$$

（2）根据一阶逻辑公式的真值定义确定所给的公式的真值，这时解释的论域是全集 U，即整数集 $\mathbb{Z}$，所有公式都是闭公式，不需要个体变量指派函数。

① 公式 $\forall x(x \in A \leftrightarrow \exists y(0 \leqslant y \leqslant 5 \ \wedge \ x = y^2))$ 是性质概括法定义集合 $A = \{x^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 5\}$ 的逻辑含义，因此真值为真。当然，也可对任意的 x 验证该公式的真值为真。

② 公式 $\forall x(0 \leqslant x \leqslant 5 \to x^2 \in A)$ 的真值为真，因为对任意的 x，若 $0 \leqslant x \leqslant 5$，即 $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$，显然都有 $x^2 \in A$。

③ 公式 $\forall x(x^2 \in A \to 0 \leqslant x \leqslant 5)$ 的真值为假，因为论域是整数集，我们有 $(-1)^2 = 1 \in A$，但是 $-1 < 0$。

④ 公式 $\forall x(x^2 \in A \wedge 0 \leqslant x \leqslant 5)$ 的真值为假，因为论域是整数集，显然并不是所有的整数 x 都有 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 成立。

【讨论】对于性质概括法定义的集合 $A = \{f(x) \mid P(x)\}$，其中的 x 如果没有特别说明，则论域是全集 U。注意这个定义的逻辑含义是对任意 $x \in A$ 当且仅当存在 y 使得 $P(y)$ 且 $x = f(y)$。

这时公式 $\forall x(P(x) \to f(x) \in A)$ 的真值为真，而公式 $\forall x(f(x) \in A \to P(x))$ 的真值不一定为真，因为按照集合 A 的定义，对任意的 x，$f(x) \in A$ 当且仅当存在 y 使得 $P(y)$ 为真且 $f(x) = f(y)$。所以，对任意 x，若 $P(x)$ 为真，则显然存在 y 等于 x 本身使得 $P(x)$ 为真且 $f(x) = f(x)$，即 $f(x) \in A$。但若 $f(x) \in A$ 只意味着存在 y 使得 $P(y)$ 为真且 $f(x) = f(y)$，这个 y 不一定就是 x，也就不一定得到 $P(x)$ 为真。例如当 $f(x) = x^2$ 时，$1 = f(-1)$，存在 1 使得 $0 \leqslant 1 \leqslant 5$ 且 $f(1) = 1$，但不意味着 $0 \leqslant -1 \leqslant 5$。

所以，在利用这样定义的集合 A 证明其他命题时，以命题“对任意 x，若 $f(x) \in A$ 则 $P(x)$”为前提，或者以命题“对任意 x，$f(x) \in A$ 且 $P(x)$”为起点开始进行证明都是错误的做法。

最后需要指出的是，性质概括法，特别是遵循子集分离公理的性质概括法虽然是最常见的定义集合的方法，但是元素枚举法以及归纳定义法也是很有用的集合定义方法。有时一个集合的所有元素的共同性质可能很难概括，例如很难用简单的谓词概括 C++ 程序的标识符中可以出现的所有符号的共同性质。而且，从计算机程序设计的角度看，元素枚举法和归纳定义法更容易设计算法和编写程序构造出集合的元素。

5.1.3 文氏图与成员关系表

在定义集合之后，更多地需要描述和研究集合之间的关系，包括集合之间的子集关系或说包含关系，集合之间的相等关系，以及利用一些基本集合通过集合运算构造集合等。文氏图和集合成员关系表可帮助人们描述集合之间的关系，因此在介绍集合运算和集合等式之前，这里先介绍文氏图和集合成员关系表的制作方法。

文氏图是描述集合的一种图形方法，通常先绘制一个方框表示全集 U，然后在方框中绘制圆形或其他封闭图形表示一个集合，例如图 5.1 给出一个集合 A 的文氏图，圆形封闭区域代表集合 A，它处于代表全集 U 的方框之中，也表示 A 是 U 的子集。

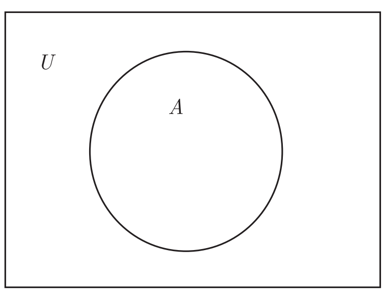


图 5.1　一个集合 A 的文氏图

当要绘制多个集合的文氏图时，对任意两个集合 A 和 B，除非特别说明没有元素同时属于 A 和 B，否则绘制的表示 A 的封闭图形和表示 B 的封闭图形要相交，也即要有重叠区域。例如，图 5.2 给出了两个集合 A 和 B 的文氏图，两个圆形重叠的区域

表示同时属于集合 A 和 B 的元素所在位置，而表示集合 A 的圆形中不与表示集合 B 的圆形重叠的区域表示只属于 A 而不属于 B 的元素所在位置，同样表示集合 B 的圆形中不与表示集合 A 的圆形重叠的区域表示只属于 B 而不属于 A 的元素所在位置。

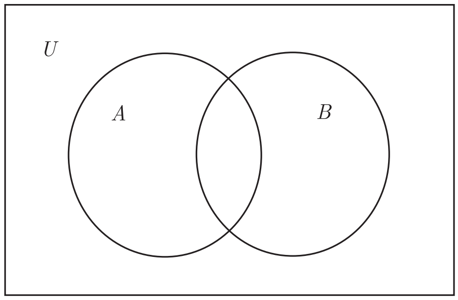
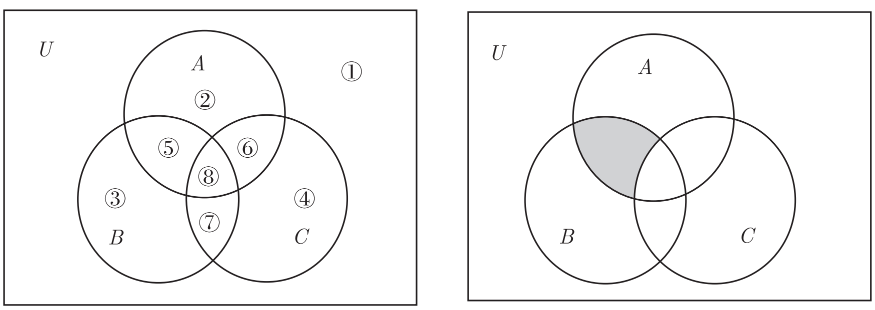


图 5.2　两个集合 A 和 B 的文氏图

一般来说，表示 n 个集合的文氏图要被表示 n 个集合的封闭图形分割为 2^n 个封闭区域，所以一般来说文氏图适合表示两个或三个集合。图 5.3 给出了三个集合 A, B 和 C 的文氏图，可以看到，分别表示集合 A, B, C 的三个圆形将表示全集 U 的方框分割成了 8 个相互不重叠的封闭区域。图 5.3(a) 分别使用了①～⑧ 标注，例如区域①代表全集中既不在 A 又不在 B 也不在 C 中的元素所在的区域，而区域⑧表示同时在集合 A, B 和 C 中的元素所在的区域。



(a)　(b)

图 5.3　三个集合 A, B 和 C 的文氏图

文氏图通常将其中的一个或多个封闭区域进行填充表示所关注的集合，或者说是该文氏图所表达的某个集合表达式。例如图 5.3(b) 填充了图 5.3(a) 中标注为⑤的区域，以代表这个文氏图所关注，或者说所真正表示的集合。后面介绍集合运算后就可给出相应的集合表达式，这里通过图就可直观地看到它是同时在集合 A 和 B，但不在集合 C 的元素所在的区域。进一步，文氏图中也可使用不同的线条或颜色填充不同的区域而表示多个关注的集合。

集合的成员关系表从某种意义上可以说是文氏图的表格表示，而且这种表格非常类似命题逻辑公式的真值表。当要研究 n 个集合时，集合的成员关系表有 2^n 行，每一行对应表示 n 个集合的文氏图的一个相互不重叠的封闭区域。例如表 5.1 给出了一个有

三个集合 A, B, C 的集合成员关系表，前面三列分别对应集合 A, B, C，下面每一行对应三个集合的文氏图的一个互不重叠的封闭区域，其中 0 表示全集的元素不属于对应列的集合，而 1 表示全集的元素属于对应列的集合因此，第一行对应全集元素既不在 A 又不在 B，也不在 C 中，即对应图 5.3(a) 中标注为①的区域，而第二行表示全集元素只在 C，而不在集合 A 和 B 中，即对应图 5.3(a) 中标注为④的区域等等。

表 5.1　有三个集合 A, B, C 的成员关系表

A	B	C	$\cdots$	S
0	0	0		0
0	0	1		0
0	1	0		0
0	1	1		0
1	0	0		0
1	0	1		0
1	1	0		1
1	1	1		0

表示 n 个集合的成员关系表除前面 n 列对应 n 个集合之外，其他列可用于表示集合表达式，也即像文氏图使用填充那样表示所关注的某个集合。例如表 5.1的最后一列表示集合 S（也可以是一个集合表达式），这一列中为 1 的行表示该集合包含这种情形下的全集元素，因此它的第七行为 1 表示，当全集元素同时属于 A 和 B 而不属于 C 时，则属于集合 S。因此这一行为 1 相当于在文氏图中填充了这一行所对应的区域，也即这个表中 S 表示的集合就是图 5.3(b) 所填充的区域。

当然，在成员关系表中这一列可以有多行取值为 1，以对应文氏图中同时填充多个区域。表 5.1 的省略号表示在计算集合 S 的全集元素隶属关系时，可能中间还要计算其他集合的元素隶属关系。与构造命题逻辑公式真值表相同，在构造成员关系表时，我们也建议每次考虑一个集合运算。

最后，集合表达式是指使用表示集合的大写字母 A, B, C 等为操作数，5.2 节要介绍的集合运算为运算符而构成的表达式。下面在介绍集合运算和集合等式时会给出更多的文氏图和集合成员关系表的例子，以帮助读者理解集合表达式所描述的集合，即集合表达式的运算结果。

5.2　集合运算

集合运算使得人们可以由一些基本的集合构成集合表达式描述相对复杂的集合。本节主要讨论集合交、集合并、集合差与补等集合运算的基本代数性质，最后介绍了集合的幂集，从而可以看到，在给定全集的情况下，集合运算对于全集的幂集封闭而构成了完整的集合代数系统。

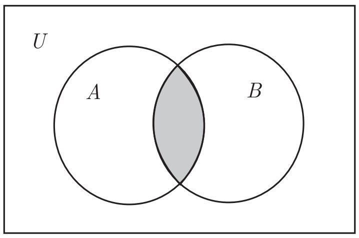
5.2.1 集合交

定义 5.4 两个集合 A 和 B 的交 (intersection)，记为 $A\cap B$，定义为

$$A\cap B \;=\; \{x \mid x\in A \;\wedge\; x\in B\}$$

因此，对任意元素 x，$x\in A\cap B$ 当且仅当 $x\in A$ 且 $x\in B$。

通俗地说，$A\cap B$ 包含那些同时在集合 A 和 B 的元素。图 5.4给出了 $A\cap B$ 的文氏图和成员关系表，可以看到它的成员关系表与逻辑合取的真值表非常类似。



A	B	$A\cap B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

图 5.4 集合 $A\cap B$ 的文氏图和成员关系表

例子 5.4 设有两个自然数集子集 A 和 B：

$$A \;=\; \{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}, 0\leqslant k\leqslant 5\} \qquad B \;=\; \{3k+1 \mid k\in\mathbb{N}, 0\leqslant k\leqslant 5\}$$

注意，这里在性质概括法定义集合时，竖线后面使用逗号相当于逻辑合取，例如，对于 A 的定义是要求 $k\in\mathbb{N}$ 且 $0\leqslant k\leqslant 5$。容易由元素枚举法得到：

$$A \;=\; \{1,3,5,7,9,11\} \qquad B \;=\; \{1,4,7,10,13,16\}$$

因此，根据集合交的定义有：$A\cap B=\{1,7\}$

问题 5.5 设有两个自然数集子集 A 和 B：

$$A \;=\; \{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\} \qquad B \;=\; \{3k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$$

试计算 $A\cap B$。

【分析】虽然这里的 A 和 B 的元素都可以有规律地罗列，但是再使用元素枚举法给出 A 和 B 的元素对于计算 $A\cap B$ 的帮助已不大，因此只能基于 $A\cap B$ 的定义直接计算。

【解答】我们有：

$$\begin{aligned} A\cap B &= \{2k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}\cap\{3k+1 \mid k\in\mathbb{N}\} \\ &= \{x \mid \exists k\in\mathbb{N}(x=2k+1)\}\cap\{x \mid \exists k\in\mathbb{N}(x=3k+1)\} \\ &= \{x \mid \exists k\in\mathbb{N}(x=2k+1) \;\wedge\; \exists k\in\mathbb{N}(x=3k+1)\} \end{aligned}$$

【讨论】（1）注意，存在量词与合取没有分配律逻辑等值式。因此，上述结果无法利用存在量词与合取之间的关系做进一步的简化。

（2）作为集合计算，上面的解答可以作为 $A\cap B$ 的结果，但有些读者可能会感觉不太满意，因为对 $A\cap B$ 中元素共同性质的概括有些复杂。那么，利用整除的性质可以证明，对任意正整数 a,b,c 有：

$$a \mid c \text{ 且 } b \mid c \quad \text{当且仅当} \quad \mathrm{lcm}(a,b) \mid c$$

这里 $\mathrm{lcm}(a,b)$ 是 a 和 b 的最小公倍数。因此对于自然数 x，若存在自然数 k 使得 $x=2k+1$，则 $2\mid x-1$，同样若存在自然数 k 使得 $x=3k+1$，则 $3\mid x-1$，从而 $6\mid x-1$。反之，若 $6\mid x-1$，显然有 $2\mid x-1$ 且 $3\mid x-1$。因此有：

$$A\cap B \quad = \quad \{x \mid \exists k\in\mathbb{N}(x=6k+1)\} \quad = \quad \{6k+1 \mid k\in\mathbb{N}\}$$

这就得到了一个更令人满意的计算结果，即 $A\cap B$ 是整除 6 余 1 的自然数构成的集合。

通过 $A\cap B$ 的定义以及上面的例子可以看到，集合交运算与逻辑合取运算有密切联系。我们不难根据与逻辑合取运算相关的等值式证明集合交的基本代数性质。

定理 5.5 设 A 和 B 是任意两个集合。

（1）集合交满足交换律，即 $A\cap B=B\cap A$。

（2）集合交满足结合律，即 $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$。

（3）集合交满足幂等律，即 $A\cap A=A$。

利用逻辑合取的交换律、结合律和幂等律等值式很容易证明，下面以交换律的证明作为例子展示证明集合相等的基本方法。

问题 5.6 证明集合交的交换律，即对任意集合 A 和 B 有 $A\cap B=B\cap A$。

【证明】对任意 x，有：

$$\begin{array}{llll}
x\in A\cap B & \text{当且仅当} & x\in A \ \wedge x\in B & // \ A\cap B \text{ 的定义} \\
 & \text{当且仅当} & x\in B \ \wedge \ x\in A & // \ p\wedge q\equiv q\wedge p \\
 & \text{当且仅当} & x\in B\cap A & // \ B\cap A \text{ 的定义}
\end{array}$$

从而根据集合相等的定义有 $A\cap B=B\cap A$。 □

【讨论】（1）可以看到，逻辑等值 $\equiv$ 在数学证明常用“当且仅当”进行推演。逻辑等值具有传递性，上面的推演每一步都是“当且仅当”，因此就得到了 $x\in A\cap B$ 当且仅当 $x\in B\cap A$。

（2）上述证明是通过逻辑等值使用“当且仅当”进行推演，也可直接写成下面的集合相等形式进行推演：

$$\begin{array}{lll}
A\cap B & = \{x \mid x\in A \ \wedge \ x\in B\} & // \ A\cap B \text{ 的定义} \\
 & = \{x \mid x\in B \ \wedge \ x\in A\} & // \ p\wedge q\equiv q\wedge p \\
 & = B\cap A & // \ B\cap A \text{ 的定义}
\end{array}$$

不难看到，这两者实质上是一样的。