第3章 离散傅里叶变换与MATLAB实现

离散傅里叶变换(Discrete Fourier Transform,DFT)是信号分析的基本方法,傅里叶变换是傅里叶分析的核心,通过它把信号从时域变换到频域,进而研究信号的频谱结构和变化规律。

DFT是傅里叶变换在时域和频域上都呈现离散的形式,将时域信号的采样变换为在离散时间傅里叶变换(DTFT)频域的采样。在形式上,变换两端(时域和频域上)的序列是有限长的,而实际上这两组序列都应当被认为是离散周期信号的主值序列。即使对有限长的离散信号做DFT,也应当将其看作经过周期延拓成为周期信号再做的变换。

3.1 有限长序列处理与MATLAB实现

给定序列的傅里叶变换,以及在同一序列不同长度情况下的DFT分析,程序如下:

```
x = [1,1,1,1];
%信号序列
A = 200;
%DTFT近似点数
w1 = 0:2/A:2;
w = pi * w1.';
xw = 1 + exp( - j * w) + exp( - j * w * 2) + exp( - j * w * 3) + exp( - j * w * 4);
%DTFT频谱分析
stem(w1.',abs(xw))
%DTFT频谱绘制
N = 32;
y1 = fft(x,N);
n = 0:N - 1;
subplot(3,1,1);
%32点DFT频谱分析
stem(n,abs(y1),'ok');
title('N = 32');
N = 64;
y2 = fft(x,N);
n = 0:N - 1;
```

```
subplot(3,1,2);
%64 点 DFT 频谱分析
stem(n,abs(y2),'ok');
title('N = 64');
N = 128;
y3 = fft(x,N);
n = 0:N - 1;
subplot(3,1,3);
%128 点 DFT 频谱分析
stem(n,abs(y3),'ok');
title('N = 128');
```

同一序列不同长度的 DFT 互不相同,如图 3-1 所示,图中描述了 32 点 DFT、64 点 DFT 以及 128 点 DFT 运行后得到的序列 DFT 输出图像。

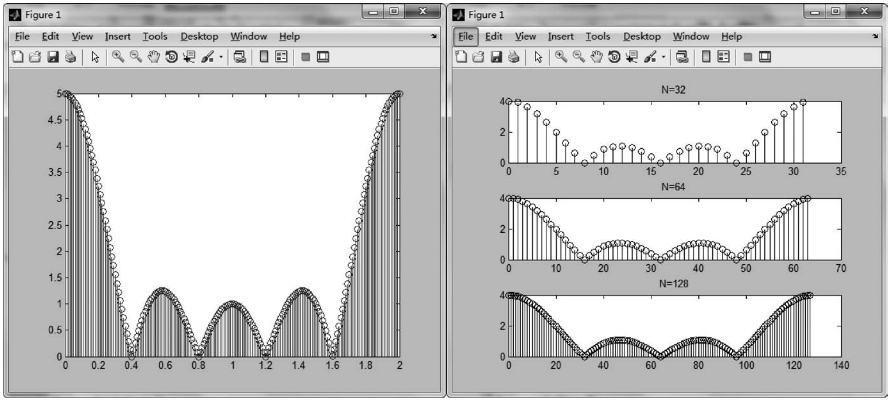

图 3-1 序列 DFT 输出

傅里叶级数的系数计算量包括 N 次复数相乘以及 $N-1$ 次复数相加。例如,对于 N 个点的傅里叶级数计算,DFT 的全部处理计算量与 N 的平方成正比,程序如下:

```
hi = 0.00001;
t =- 0.005:hi:0.005;
%取值台阶
xn = exp( - 500 * abs(t));
%信号序列
Ww = 2 * pi * 2000;
N = 1000;
n = 0:2:N;
W = n * Ww/N;
%傅里叶变换
Xn = xn * exp( - j * t' * W) * hi;
Xa = real(Xn);
W = [ - fliplr(W),W(2:501)];
Xn = [fliplr(Xn),Xn(2:501)];
subplot(1,2,1);
plot(t * 1000,xn,'o');
xlabel('t(s)');
ylabel('xn');
```

```
title('源信号');
subplot(1,2,2);
plot(W/(2 * pi * 1000),Xn * 1000,'o');
xlabel('f(KHz)');
ylabel('jw');
title('对应序列的傅里叶变换');
```

程序运行后得到的序列 DFT 输出图像如图 3-2 所示。

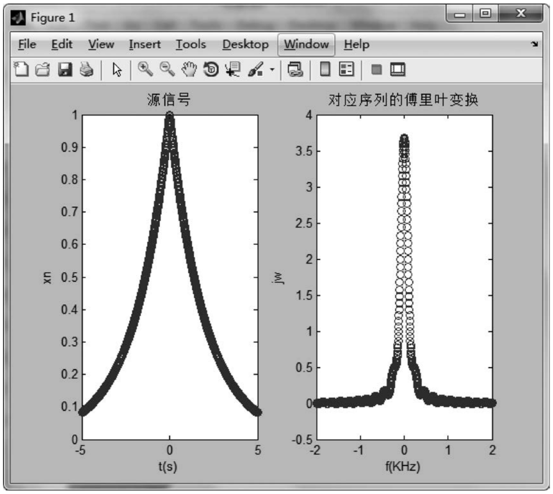

图 3-2　DFT 输出图像

3.2　*N* 点离散傅里叶变换与 MATLAB 实现

选择正弦函数与余弦函数作为基函数是因为它们的正交性，周期函数都可以用正弦函数和余弦函数构成的无穷级数表示。对于周期为 T 的函数，n 取不同值时的周期信号具有谐波关系(即它们都具有一个共同周期 T)。$n=0$ 时，对应的这一项称为直流分量，$k=1$ 时，具有基波频率。N 点离散傅里叶变换与 MATLAB 实现程序如下：

```
N = 32;
N1 = 16;
n = 0:N - 1;
k = 0:N1 - 1;
x1n = exp(j * pi * n/8);
%x1 信号
y1 = fft(x1n,N);
%[x1]N 点 DFT
y2 = fft(x1n,N1);
%[x1]N1 点 DFT
x2n = cos(pi * n/16);
%x2 信号
y3 = fft(x2n,N);
%[x2]N 点 DFT
```

```
y4 = fft(x2n,N1);
%[x2]N1 点 DFT
subplot(2,2,1);
stem(n,abs(y1),'o');
ylabel('|y1|')
title('16 点的 DFT:x1')
subplot(2,2,2);
stem(n,abs(y3),'o');
ylabel('|y2|')
title('16 点的 DFT:x2')
subplot(2,2,3);
stem(k,abs(y2),'>');
ylabel('|y1|')
title('8 点的 DFT:x1')
subplot(2,2,4);
stem(k,abs(y4),'*');
ylabel('|y2|')
title('8 点的 DFT:x2')
```

x1 信号和 x2 信号的周期延拓输出的为单频序列，其 DFT 由程序中的 $N=32$ 与 $N1=16$ 表示，输出图像如图 3-3 所示。

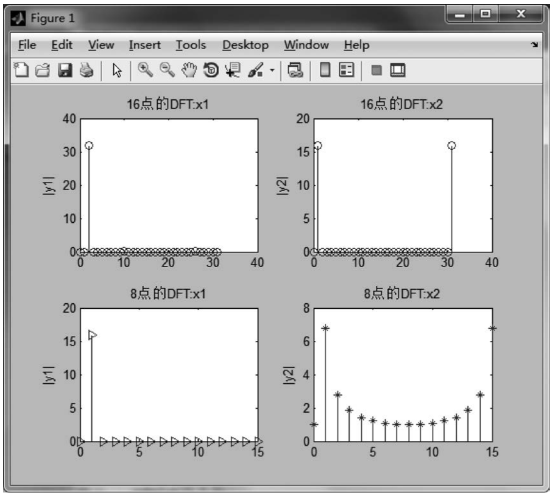

图 3-3　周期延拓序列 DFT 输出图像

有限长序列的频谱分析是基于离散傅里叶变换在时域和频域都有有限长序列，并且是离散的这种情况，程序如下：

```
xn = [0.25 0.5 0.75 1]
N = length(xn);
n = 0:(N-1);
k = 0:(N-1);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
xk = xn * exp(-j * 2 * pi/N).^(n' * k)
xn0 = (xk * exp(j * 2 * pi/N).^(n' * k))/N
%% subplot(2,2,1); stem(n,xn);title('x(n)');
```

```
%% subplot(2,2,2); stem(n,xk); title('IDFT[X(k)]');
%% subplot(2,2,3); stem(k,abs(xk)); title('|X(k)|');
%% subplot(2,2,4); stem(k,angle(xk)); title('arg|X(k)|');
```

xk 为序列的 DFT，xn0 为序列对应的 IDFT（离散傅里叶逆变换），最终结论为原始序列 xn=[0.25 0.5 0.75 1]与 IDFT 结果 xn0 相等。运行输出结果如下：

```
xk =
   2.5000                - 0.5000 + 0.5000i
  - 0.5000 - 0.0000i   - 0.5000 - 0.5000i
xn0 =
   0.2500 - 0.0000i      0.5000 - 0.0000i
   0.7500 - 0.0000i      1.0000 + 0.0000i
>>
```

基于 mod 函数实现圆周位移，可将 N 点序列循环左移或者右移 m 个采样周期，例如，对于特定序列，程序如下：

```
N = 4;
n = 0:N - 1;
m = 2;
xn = [4 2 1 1/2];
nm = mod((n - m),N);
xm = xn(nm + 1);
subplot(1,2,1);
stem(xn,'o');
xlabel('n');
ylabel('|xn|');
title('信息序列');
subplot(1,2,2);
stem(xm,'o');
xlabel('n');
ylabel('|xm|');
title('位移序列');
```

xn 为原始序列，xm 为位移序列，xn 与 xm 运行输出对比如图 3-4 所示。

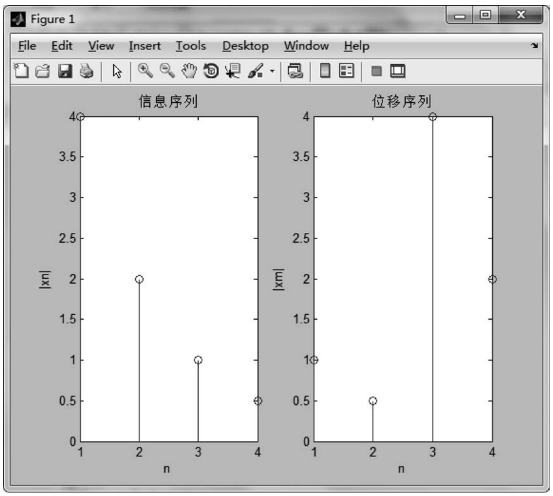

图 3-4　基于 mod 函数实现的圆周位移

3.3 序列圆周积分与 MATLAB 实现

序列圆周积分可以由 x1、x2 和 y 的波形分布得到，实现程序如下：

```
n = 0:30;
x1 = [0.25 1.5 0.5 1.5 0.75];
x2 = 0.9.^n;
N = 30;
x1 = [x1 zeros(1, N - length(x1))];
x2 = [x2 zeros(1, N - length(x2))];
for n = 1:N
    for m = 1:N
        y(n,m) = x1(m) * x2(mod( (n - m), N) + 1 );
    end
end
y = sum(y');
subplot(131);
stem(x1);
title('x1');
subplot(132);
stem(x2);
title('x2');
subplot(133);
stem(y);
title('y');
```

x1 与 x2 为圆周积分序列，y 为序列圆周积分结果，程序运行后输出图像如图 3-5 所示。

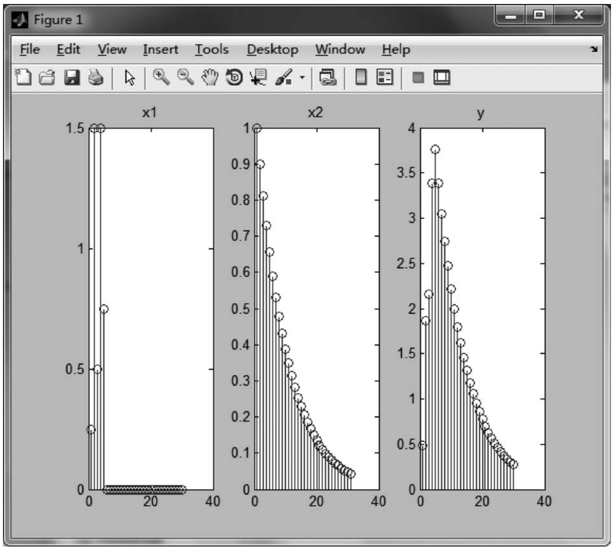

图 3-5　序列圆周积分图像

3.4 本章小结

DFT 的特点之一是隐含的周期性，从表面上看，DFT 在时域和频域都是非周期的有限长的序列，但实质上，DFT 是从 DFS（离散傅里叶级数）引申而来的，它们的本质是一致的，因此 DFS 的周期性决定了 DFT 具有隐含的周期性。

在实际工程中经常遇到的模拟信号频谱函数也是连续函数，为了利用 DFT 对模拟信号进行谱分析，首先对模拟信号进行时域采样得到离散量 $x(n)$，再对离散量进行 DFT，得到的 $x(k)$ 是 $x(n)$ 的傅里叶变换在频率区间[0，单位周期]上的 N 点等间隔采样，这里 $x(n)$ 和 $x(k)$ 都是有限长序列。

然而，时间有限长信号的频谱是无限宽的，反之，信号的频谱有限，则其持续时间将为无限长。因此，按采样定理采样时，采样序列应为无限长，这不满足 DFT 的条件。实际工程中，对于频谱很宽的信号，为防止时域采样后产生“频谱混叠”，一般用前置滤波器滤除幅度较小的高频成分，使信号的带宽小于折叠频率；同样，对于持续时间很长的信号，采样点数太多也会导致存储和计算困难，一般也是截取有限点进行计算。用 DFT 对模拟信号进行谱分析，只能是近似的，其近似程度取决于信号带宽、采样频率和截取长度。