第3章

随 机 向 量

描述抛掷一颗均匀骰子，观察出现点数的随机试验的随机变量 X，其分布律为 $X\sim\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$。要描述抛掷两颗均匀骰子，观察每个骰子出现点数的随机试验，一个随机变量是不够的。设这两颗骰子质地相同，且可辨识。用 X 表示其中一颗出现的点数，Y 表示另一颗出现的点数，两者都是随机变量，则这个试验的样本点就可以用 2-维向量 (X,Y) 表示。(X,Y) 的所有可能取值序偶及其对应样本点发生的概率可以用表 3-1 表示。

表 3-1 (X,Y) 的所有可能取值序偶及其对应样本点发生的概率

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

由此例可见，对于复杂试验，有时需要用若干个随机变量构成向量——随机向量——来描述。不难推想，抛掷三颗均匀骰子的试验需要用由三个随机变量 X，Y 和 Z 组成的 3-维向量 (X,Y,Z) 来描述。一般地，

定义 3-1 由描述同一个试验 E 的随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 组成的向量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 称为**n-维随机向量**。

由于涉及的概念、术语，所用的研究方法几乎是一样的，本章主要就

2-维随机向量展开讨论，将一般的 n-维随机向量作为 2-维随机向量的推广。

3.1　2-维随机向量的联合分布函数

定义 3-2　给定 2-维随机向量 (X,Y)，对 $x,y\in\mathbb{R}$，定义

$$F(x,y)=P(X\leqslant x,Y\leqslant y)=P(\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\})$$

为 (X,Y) 的**联合分布函数**，简称为分布函数。

按此定义，$F(x,y)$ 为 (X,Y) 的取值序偶落在如图 3-1 所示的平面区域内的概率。

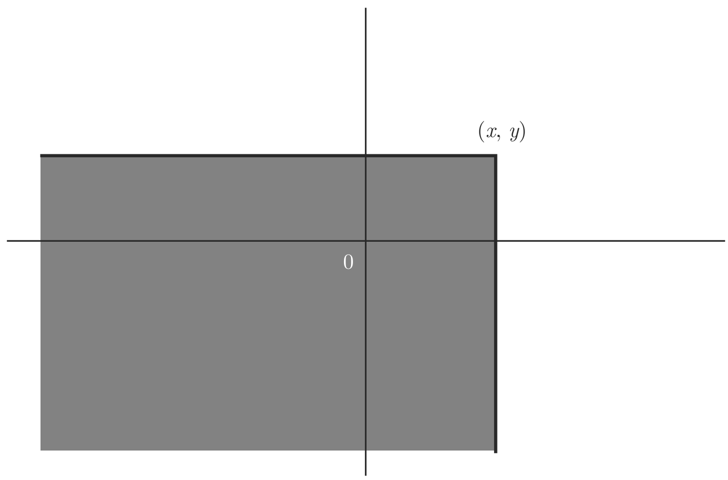

图 3-1　事件 $\{X\leqslant x,Y\leqslant y\}=\{X\leqslant x\}\cap\{Y\leqslant y\}$

与随机变量的分布函数相仿，随机向量的联合分布函数也有许多优良的性质。

定理 3-1　设 2-维随机向量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，则：

(1) 有界性：$0\leqslant F(x,y)\leqslant 1$。

(2) 规范性：$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{y\to-\infty}F(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\y\to-\infty}}F(x,y)=0$，$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\y\to\infty}}F(x,y)=1$。

(3) 单调性：$F(x,y)$ 分别关于 x，y 单调不减。

(4) 连续性：$F(x,y)$ 分别关于 x，y 至少右连续。

(5) $P(x_1<X\leqslant x_2,y_1<Y\leqslant y_2)=F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_2,y_2)$。

对比随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 定义及其性质（详见定理 2-1），不难理解 2-维随机向量 (X,Y) 的量和分布函数 $F(x,y)$ 的各条性质的意义。

性质（1）~（4）的几何意义是 $F(x,y)$ 的图形是位于平行平面 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的一块曲面，如图 3-2 所示。

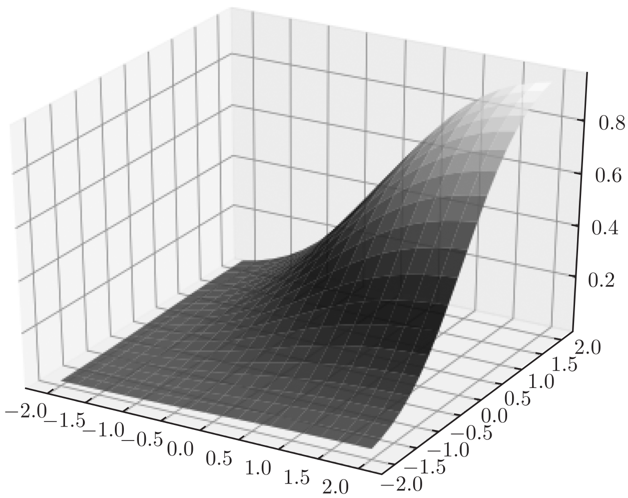

图 3-2　一个 2-维随机变量的联合分布函数图形

而性质（5）的几何意义则由图 3-3 所示。

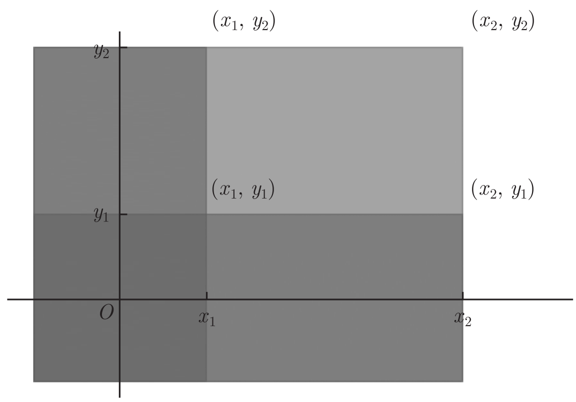

图 3-3　$\{x_1 < X \leqslant x_2, y_1 < Y \leqslant y_2\} = (\{X \leqslant x_2, Y \leqslant y_2\} - \{X \leqslant x_2, Y \leqslant y_1\} - \{X \leqslant x_1, Y \leqslant y_2\}) \cup \{X \leqslant x_1, Y \leqslant y_1\}$

例 3-1　设 2-维随机向量 (X,Y) 的分布函数为

$$F(x,y) = \frac{1}{\pi^2}\left(A + \arctan\frac{x}{2}\right)\left(B + \arctan\frac{y}{3}\right), x, y \in \mathbb{R}$$

（1）确定 A、B 的值。

（2）计算 $P(X \leqslant 2, Y \leqslant 3)$。

解：（1）由分布函数的规范性：$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x,y) = 0$ 和 $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} F(x,y) = 1$，得

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\pi^2}\left(A - \dfrac{\pi}{2}\right)\left(B - \dfrac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \dfrac{1}{\pi^2}\left(A + \dfrac{\pi}{2}\right)\left(B + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解此方程组得 $A = B = \dfrac{\pi}{2}$。即

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right),x,y\in\mathbb{R}$$

（2）$P(X\leqslant 2,Y\leqslant 3)=F(2,3)=\dfrac{1}{\pi^2}\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan 1\right)\left(\dfrac{\pi}{2}+\arctan 1\right)=9/16$。

练习 3-1　对例 3-1，计算概率 $P(0<X\leqslant 2,0<Y\leqslant 3)$。

参考答案：1/16。

3.2　离散型 2-维随机向量

3.2.1　离散型 2-维随机向量的联合分布律

定义 3-3　构成 2-维随机向量 (X,Y) 的两个变量 X、Y 都是离散型的，称为**2-维离散型随机向量**。

定义 3-4　设 (X,Y) 为 2-维离散型随机向量，X 与 Y 的所有取值分别为 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 和 $\{y_1,y_2,\cdots,y_m,\cdots\}$。不失一般性，假定 $x_1<x_2<\cdots<x_n<\cdots$ 及 $y_1<y_2<\cdots<y_m<\cdots$，记

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})=p_{ij},i=1,2,\cdots,n,\cdots,j=1,2,\cdots,m,\cdots$$

称为 (X,Y) 的**联合分布律**，简称为分布律。

2-维离散型随机向量的联合分布律可以用列表表示（本书约定，向量 (X,Y) 的第一坐标 X 的取值纵向展开，第二坐标 Y 的取值横向展开），如表 3-2 所示。

表 3-2　2-维离散型随机向量的联合分布律

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

与离散型随机变量分布律相仿，2-维离散型随机向量的联合分布律有如下性质。

定理 3-2　设离散型 2-维随机向量的联合分布律为 $P(X=x_i,Y=y_j)=P(\{X=x_i\}\cap\{Y=y_j\})=p_{ij},i=1,2,\cdots,n,\cdots,j=1,2,\cdots,m,\cdots$，则

（1）有界性：$0\leqslant p_{ij}\leqslant 1$。

（2）归一性：$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=1$。

（3）分布函数：$F(x,y)=\sum\limits_{x_i\leqslant x}\sum\limits_{y_j\leqslant y}p_{ij}$。

应当说明的是 X 或 Y 的取值为有限多个，则性质（2）中的求和也是有限的。

例 3-2 盒子里有 2 个黑球、2 个红球、2 个白球。在其中任取 2 个球，以 X 表示取得的黑球个数，以 Y 表示取得的红球个数。写出 (X,Y) 的联合分布律，并计算概率 $P(X+Y\leqslant 1)$。

解： X 和 Y 的取值范围均为 $\{0,1,2\}$。$P(X=0,Y=0)=P$(取得的 2 个球均为白色的) $=\mathrm{C}_2^2/\mathrm{C}_6^2=1/15$。类似地，有 $P(X=2,Y=0)=P(X=0,Y=2)=1/15$。$P(X=0,Y=1)=P$(取得 1 个红球 1 个白球) $=\mathrm{C}_2^1\cdot\mathrm{C}_2^1/\mathrm{C}_6^2=4/15$。类似地，$P(X=1,Y=0)=P(X=1,Y=1)=4/15$。不难理解，$P(X=1,Y=2)=P(X=2,Y=1)=P(X=2,Y=2)=0$。于是，$(X,Y)$ 的联合分布律写成表格如表 3-3 所示。

表 3-3 (X,Y) 的联合分布律

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	0
2	$\frac{1}{15}$	0	0

考虑事件 $X+Y\leqslant 1$：$\{X=0,Y=0\}\cup\{X=0,Y=1\}\cup\{X=1,Y=0\}$。于是 $P(X+Y\leqslant 1)=P(X=0,Y=0)+P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)=1/15+4/15+4/15=9/15=3/5$。

练习 3-2 一个口袋中有 4 个球，它们上面分别标有数字 1、2、2、3。从这个口袋中任取一个球后，不放回袋中，再从袋中任取一个球。依次以 X、Y 表示第一次、第二次取得的球上标有的数字。写出 (X,Y) 的联合分布律。

参考答案：

X \ Y	1	2	3
1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
3	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	0

3.2.2　离散型 2-维随机向量的边缘分布与条件分布

给定 2-维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布律

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},i,j=1,2,\cdots$$

给定 j，考虑概率 $P(Y=y_j)$。由于事件 $Y=y_j$ 与事件 $X=x_1$，$X=x_2$，$\cdots$ 有关，所以按全概率公式有

$$\begin{aligned}P(Y=y_j)&=P(X=x_1)P(Y=y_j|X=x_1)+P(X=x_2)P(Y=y_j|X=x_2)+\cdots\\&=P(X=x_1,Y=y_j)+P(X=x_2,Y=y_j)+\cdots\\&=p_{1j}+p_{2j}+\cdots=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}\\&=p_{\cdot j}\end{aligned}$$

其中，$j=1,2,\cdots$。称为 Y 的**边缘分布**。

类似地，X 的边缘分布为 $P(X=x_i)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot}$，$i=1,2,\cdots$。若将联合分布律表示成表格，则可按行（列）相加得到 X（Y）的边缘分布，如表 3-4 所示。习惯上写在联合分布律的右边缘和下边缘，所以称为边缘分布。

表 3-4　2-维离散型随机向量的边缘分布

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n	$\cdots$	$P(X=x_i)$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2n}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{in}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}	$\cdots$	p_{mn}	$\cdots$	$p_{m\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$P(Y=y_j)$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	$p_{\cdot n}$	$\cdots$	1

注意，右下角的“1”表明无论是联合分布律还是边缘分布律，都遵从归一性。

例 3-3　从含有 3 个正品、2 个次品的 5 个产品中依次无放回地抽取两个。设 X 表示第 1 次取到的次品个数，Y 表示第 2 次取到的次品个数。求 (X,Y) 的联合分布律以及 X 和 Y 的边缘分布。

解： 显然，X 和 Y 的所有可能取值均为 $\{0,1\}$。由于是无放回抽取，

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j|X=i),i,j=0,1$$

$P(X=0,Y=0)=(3/5)(2/4)=3/10$，$P(X=0,Y=1)=(3/5)(2/4)=3/10$，
$P(X=1,Y=0)=(2/5)(3/4)=3/10$，$P(X=1,Y=1)=(2/5)(1/4)=1/10$。
于是，(X,Y) 的联合分布律可以列成表格，如表 3-5 所示。

表 3-5 (X,Y) 的联合分布律

X \ Y	0	1	$P(X=k)$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

对联合分布律表格，按行相加，得到 X 的边缘分布（写在右边缘）；按列相加，得到 Y 的边缘分布（写在下边缘）。

练习 3-3 例 3-3 中按有放回抽取方式，计算 (X,Y) 的联合分布律以及 X 和 Y 的边缘分布。

参考答案：

X \ Y	0	1	$P(X=k)$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

设 (X,Y) 为 2-维离散型随机向量，联合分布律为 $P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij}$，$i,j=1,2,\cdots$。实践中，常需计算对特定的 i，计算 $P(Y=y_j|X=x_i)$，$j=1,2,\cdots$。称为已知 $X=x_i$ 的条件下，Y 的**条件分布**。对特定的 i，Y 的条件分布

$$P(Y=y_j|X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}},j=1,2,\cdots$$

即用 X 的边缘分布中第 i 取值的概率遍除联合分布律表格中对应行的每一项，便得所求。

类似地，

$$P(X=x_i|Y=y_j)=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},i=1,2,\cdots$$

称为 $Y = y_j$ 条件下，X 的条件分布。

例 3-4 为求例 3-3 中已知 $X = 1$ 的条件下 Y 的条件分布，由 X 的边缘分布得 $P(X = 1) = 2/5$，用其遍除联合分布律中对应 $X = 1$ 的那一行中的概率，$P(X = 1, Y = 0) = 3/10$，$P(X = 1, Y = 1) = 1/10$。得到条件分布的分布律，如表 3-6 所示。

表 3-6 条件分布的分布律

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=k)$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

Y	0	1
$P(Y\|X=1)$	$\frac{3/10}{2/5} = \frac{3}{4}$	$\frac{1/10}{2/5} = \frac{1}{4}$

也就是说，若已知第一次取得次品，则有 3/4 的把握，预测第二次取得正品；有 1/4 的把握预测取到次品。

练习 3-4 计算例 3-4 中 $Y = 0$ 的条件下，X 的分布律。

参考答案：$(X|Y=0) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$。

3.2.3 离散型随机变量的独立性

设离散型随机向量 (X, Y) 的联合分布律为 $P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$。$X$，$Y$ 的边缘分布律分别为 $P(X = x_i) = p_{i\cdot}, i = 1, 2, \cdots$，$P(Y = y_j) = p_{\cdot j}, j = 1, 2, \cdots$。我们知道，

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j|X = x_i), i, j = 1, 2, \cdots$$

此时，若有 $P(Y = y_j|X = x_i) = P(Y = y_j), i, j = 1, 2, \cdots$，即条件概率与无条件概率相等，则

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) = p_{i\cdot}p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \cdots$$

称 X 与 Y **相互独立**。

例 3-5 例 3-3 中在 3 个正品、2 个次品的 5 个产品中依次无放回地抽取两个，X，Y 分别表示第一次和第二次取得的次品数。(X,Y) 的联合分布律和 X，Y 的边缘分布律如表 3-7 所示。

表 3-7 (X,Y) 的联合分布律和 X,Y 的边缘分布律

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=k)$
0	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

很明显，$P(X=0,Y=0)=3/10 \neq (3/5)(3/5)=P(X=0)\cdot P(Y=0)$。故 X，Y 不相互独立。然而，在练习 3-3 中，换成有放回抽取方法，则 (X,Y) 的联合分布律和 X，Y 的边缘分布律如表 3-8 所示。

表 3-8 有放回抽取方法下 (X,Y) 的联合分布律和 X,Y 的边缘分布律

$X \backslash Y$	0	1	$P(X=k)$
0	$\frac{9}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{2}{5}$
$P(Y=k)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	1

不难验算，$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$，$i,j=0,1$。所以，在有放回抽取方式下，X，Y 是相互独立的。

随机变量 X 和 Y 相互独立的意义就是 X 的取值不影响 Y 的取值，反之亦然。离散型随机变量的独立性告诉我们，若 X 与 Y 相互独立，则由 X、Y 的边缘分布律可得 (X,Y) 的联合分布律。例如，本章开头提到的抛掷两颗均匀骰子，观察它们出现的点数 (X,Y) 的试验，不难理解 X 与 Y 是相互独立的。X 与 Y 的分布律均为 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$。所以可得 (X,Y) 的联合分布律如表 3-9 所示。

表 3-9　(X, Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
4	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
5	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
6	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

练习 3-5　已知 (X,Y) 的分布律如表 3-10 所示。

表 3-10　(X, Y) 的分布律

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$
2	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
3	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$	0
4	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

(1) 计算 X 和 Y 的边缘分布律。

(2) 计算 $X=4$ 下 Y 的条件分布律和 $Y=3$ 下 X 的分布律。

(3) 判断 X 与 Y 是否相互独立。

参考答案：(1) $X\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$；

(2)$Y|(X=4)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，$X|(Y=3)\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$；(3)不独立。

3.2.4　Python 解法

本节中，假定 2-维离散型随机向量 (X,Y) 的联合分布律如表 3-11 所示。

表 3-11 (X,Y) 的联合分布律

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mn}

即随机变量 X 取 m 个值，Y 取 n 个值，如果只关注 (X,Y) 的联合分布中的概率值，则联合分布律可简约地表示成一个 $m\times n$ 的矩阵，记为 $\boldsymbol{P}_{XY}$，即

$$\boldsymbol{P}_{XY}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix}$$

1. 联合分布律的表示

Python 的 scipy.stats 包并未提供 2-维分布，但 numpy 包的 array 数组类对象却能很好地表示这样的 2-维离散型随机向量的联合分布律。

例 3-6 下列代码表示例 3-3 中的随机向量 (X,Y) 的联合分布律中由概率构成的矩阵 $\boldsymbol{P}_{XY}=\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$。

```
1 import numpy as np                          #导入numpy
2 from sympy import Rational as R
3 Pxy=np.array([[R(3,10), R(3,10)],           #创建2-维数组Pxy
4               [R(3,10), R(1,10)]])
5 print(Pxy)                                  #输出2-维数组
```

程序 3.1 用 numpy 的 array 类对象表示 2-维离散型随机向量分布律

第 3~4 行创建一个名为 Pxy 的 array 类对象，将其设置为两个等长的数组的数组，从而构成一个矩阵。Pxy 中的每一个元素设置为表示有理数的 Rational 对象（第 2 行导入，别名为 R）。运行该程序，输出如下。

```
[[3/10 3/10]
 [3/10 1/10]]
```

练习 3-6 用 numpy.array 表示练习 3-5 中随机向量 (X,Y) 的联合分布律中的概率矩阵 P_{XY}。

参考答案：见文件 chapter03.ipynb 中对应代码。

2. 边缘分布的计算

由例 3-6 可见，numpy 的 array 类对象可将矩阵表示为 2-维数组——数组的数组。2-维数组有两个“轴”：纵向记为 axis=0，横向记为 axis=1，如图 3-4 所示。

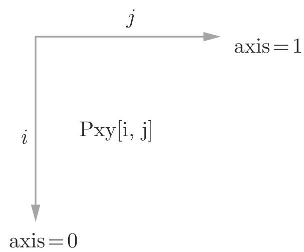

图 3-4　numpy 的 array 对象表示 2-维数组结构

为计算变量 X 及 Y 的边缘分布律，可调用 array 类对象 Pxy 的 sum 函数，指定按行对列标 j（axis=1）相加得到 X 的边缘分布律的概率列向量，这是一个具有 m 个元素的数组，记为 Px；按列对行标 i（axis=0）相加得 Y 的边缘分布律的概率行向量，是一个具有 n 个元素的数组，记为 Py。下列程序定义了按此方法根据联合分布律的概率矩阵 $\boldsymbol{P}_{XY}$ 计算边缘分布律概率向量 $\boldsymbol{P}_X$ 和 $\boldsymbol{P}_Y$ 的 Python 函数。

```
1 import numpy as np                      #导入numpy
2 def margDist(Pxy):                      #定义计算边缘分布的函数
3     Px=Pxy.sum(axis=1)                  #按行相加得X分布律
4     Py=Pxy.sum(axis=0)                  #按列相加得Y分布律
5     return (Px.reshape(Px.size, 1),     #返回Px, Py
6             Py.reshape(1, Py.size))
```

程序 3.2　计算边缘分布的 Python 函数定义

程序 3.2 中第 2~5 行定义了用于根据 (X,Y) 的联合分布律计算 X 和 Y 的边缘分布的函数 margDist。参数 Pxy 是组织为 2-维数组的 (X,Y) 的联合分布律中的概率矩阵。第 3 行、第 4 行分别对 Pxy 按行相加和按列相加得到 X、Y 的边缘分布律存于 Px 和 Py。第 5~6 行将 Px，Py 作为返回值返回。需要提及的是，为将 array 类对象表示的 1-维数组设置为一个列向量或行向量，以便与 2-维数组表示的矩阵进行统一的运算，要调用该数组的 reshape 函数。因此，第 5 行返回的 Px 为列向量

$$\begin{pmatrix} p_{1\cdot} \\ p_{2\cdot} \\ \vdots \\ p_{m\cdot} \end{pmatrix}$$

Py 为行向量 $(p_{\cdot 1}, p_{\cdot 2}, \cdots, p_{\cdot n})$。将程序 3.2 的代码写入文件 utility.py，便于调用。

例 3-7 下列代码计算例 3-3 的随机向量 (X,Y) 中的 X 和 Y 的边缘分布的概率向量。

```
1 import numpy as np                          #导入numpy
2 from sympy import Rational as R             #导入Rational
3 from utility import margDist                #导入margDist
4 Pxy=np.array([[R(3,10), R(3,10)],           #创建联合分布律Pxy
5               [R(3,10), R(1,10)]])
6 Px, Py=margDist(Pxy)                        #计算边缘分布律
7 print('Px:%s'%Px)
8 print('Py:%s'%Py)
```

程序 3.3 验算例 3-3 中 X 与 Y 的边缘分布的 Python 程序

第 4~5 行设置 (X,Y) 的联合分布律的概率矩阵 Pxy。第 6 行调用程序 3.2 定义的函数 margDist（第 3 行导入），计算结果赋予 Px，Py。运行程序，输出如下。

```
Px:[[3/5]
 [2/5]]
Py:[[3/5 2/5]]
```

此即例 3-3 的计算结果。

练习 3-7 利用程序 3.2 定义的 margDist 函数计算练习 3-5 的随机向量 (X,Y) 中 X 和 Y 的边缘分布的概率向量。

参考答案：见文件 chapter03.ipynb 中对应代码。

3. 条件分布的计算

计算 2-维离散型随机向量 (X,Y) 的条件分布律，譬如 $P(X|Y=y_j)$，就是用 Y 的边缘分布中的 $P(Y=y_j)=p_{\cdot j}$ 遍除联合分布律中第 j 列中每个元素 p_{ij}，$i=1,2,\cdots n$。即

$$\begin{pmatrix} p_{1j}/p_{\cdot j} \\ p_{2j}/p_{\cdot j} \\ \vdots \\ p_{mj}/p_{\cdot j} \end{pmatrix}, j=1,2,\cdots,n$$

也就是说，矩阵

$$\begin{pmatrix} p_{11}/p_{\cdot 1} & p_{12}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{1n}/p_{\cdot n} \\ p_{21}/p_{\cdot 1} & p_{22}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{2n}/p_{\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}/p_{\cdot 1} & p_{m2}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{mn}/p_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

表示出了所有已知 Y 取一值，X 的条件分布。幸运的是，numpy 的 array 类对象表示的一个 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与一个具有同结构的矩阵，或具有 m 个元素的列向量或具有

n 个元素的行向量 $\boldsymbol{B}$ 支持包括 “+” “−” “*” “/” 等的**按元素运算**。例如，

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} p_{\cdot 1} & p_{\cdot 2} & \cdots & p_{\cdot n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}/p_{\cdot 1} & p_{12}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{1n}/p_{\cdot n} \\ p_{21}/p_{\cdot 1} & p_{22}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{2n}/p_{\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}/p_{\cdot 1} & p_{m2}/p_{\cdot 2} & \cdots & p_{mn}/p_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} p_{1\cdot} \\ p_{2\cdot} \\ \vdots \\ p_{m\cdot} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}/p_{1\cdot} & p_{12}/p_{1\cdot} & \cdots & p_{1n}/p_{1\cdot} \\ p_{21}/p_{2\cdot} & p_{22}/p_{2\cdot} & \cdots & p_{2n}/p_{2\cdot} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1}/p_{m\cdot} & p_{m2}/p_{m\cdot} & \cdots & p_{mn}/p_{m\cdot} \end{pmatrix}$$

这恰与我们根据联合分布律与 Y 和 X 的边缘分布律分别计算条件分布 $P(X|Y)$ 和 $P(Y|X)$ 的方式不谋而合。我们将上述计算而得的表示 $P(X|Y)$ 的矩阵记为 $\boldsymbol{P}_{X|Y}$，表示 $P(Y|X)$ 的矩阵记为 $\boldsymbol{P}_{Y|X}$。

利用 numpy 的 array 类的这一技术，定义如下的计算 2-维离散型随机向量的条件分布的 Python 函数。

```
1 from utility import margDist          #导入margDist
2 def condDist(Pxy):                    #定义计算条件分布的函数
3     Px, Py=margDist(Pxy)              #计算边缘分布
4     Px_y=Pxy/Py                       #计算P(X/Y)
5     Py_x=Pxy/Px                       #计算P(Y/X)
6     return Px_y, Py_x
```

程序 3.4　计算条件分布的 Python 函数定义

函数 condDist 的参数 Pxy 是 (X,Y) 的联合分布律的概率值矩阵。第 3 行调用程序 3.2 中定义的计算边缘分布的函数 margDist(Pxy)（第 1 行导入），计算 X 和 Y 的边缘分布律的概率值序列，存于 Px（列向量），Py（行向量）。第 4 行、第 5 行分别计算 $P(X|Y)$ 和 $P(Y|X)$。为便于调用，将程序 3.4 的代码写入文件 utility.py。

例 3-8　下列代码验算例 3-4 中条件分布 $Y|X=1$ 和练习 3-4 中条件分布 $X|Y=0$。

```
import numpy as np                  #导入numpy
from sympy import Rational as R     #导入Rational
from utility import condDist        #导入condDist
Pxy=np.array([[R(3,10), R(3,10)],   #创建联合分布律Pxy
              [R(3,10), R(1,10)]])
Px_y, Py_x=condDist(Pxy)            #计算条件分布律
```

```
7 print('P(X|Y=0):%s'%Px_y[:,0])        #输出Px/y=0
8 print('P(Y|X=1):%s'%Py_x[1])          #输出Py/x=1
```

程序 3.5 验算例 3-4 中条件分布律的 Python 程序

程序的第 6 行调用程序 3.3 中定义的计算条件分布的函数 condDist(Pxy)，计算由 Pxy 表示的联合分布律的 2-维离散型随机向量 (X,Y) 的条件分布律 $P(X|Y)$ 和 $P(Y|X)$，存储于 Px_y 和 Py_x。其第 1 列数据 Px_y[:,0] 和第 2 行数据 Py_x[1] 恰为条件分布 $P(X|Y=0)$ 和 $P(Y|X=1)$ 的概率。运行此程序，将输出

```
P(X|Y=0):[1/2 1/2]
P(Y|X=1):[3/4 1/4]
```

其中，P(Y|X=1) 的数据 3/4 和 1/4 恰为例 3-4 中 $P(Y|X=1)$ 的计算结果；P(X|Y=0) 的数据 1/2 和 1/2 恰为练习 3-4 中 $P(X|Y=0)$ 的计算结果。

练习 3-8 利用 condDist 函数计算练习 3-5 的随机向量 (X,Y) 条件分布 $Y|X=4$ 和 $X|Y=3$。

参考答案：见文件 chapter03.ipynb 中对应代码。

4. 独立性判断

随机变量之间的独立性是非常重要的关系。对有限取值的离散型随机变量 X，Y 而言，我们知道 X，Y 独立，当且仅当 $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}, 1\leqslant i\leqslant m, 1\leqslant j\leqslant n$。用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot n} \\ p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot n} \end{pmatrix}$$

而

$$\begin{pmatrix} p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{1\cdot}\cdot p_{\cdot n} \\ p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{2\cdot}\cdot p_{\cdot n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot 1} & p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot 2} & \cdots & p_{m\cdot}\cdot p_{\cdot n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{1\cdot} \\ p_{2\cdot} \\ \vdots \\ p_{m\cdot} \end{pmatrix} \cdot (p_{\cdot 1}, p_{\cdot 2}, \cdots, p_{\cdot n})$$

将 (X,Y) 的联合分布律中的概率值矩阵记为 $\boldsymbol{P}_{XY}$，X 的边缘分布概率值列向量表为 $\boldsymbol{P}_X$，Y 的边缘分布概率值行向量表为 $\boldsymbol{P}_Y$。这样，为验证 X 与 Y 是否相互独立，只需验证

$$\boldsymbol{P}_{XY}=\boldsymbol{P}_X\cdot\boldsymbol{P}_Y$$

是否成立。

下列代码定义了根据有限取值的 (X,Y) 的联合分布律概率值矩阵 $\boldsymbol{P}_{XY}$，判断两个离散型随机变量 X 与 Y 是否独立的 Python 函数。

```
1 import numpy as np                    #导入numpy
2 from utility import margDist          #导入margDist
3 def independent(Pxy):                 #判断X,Y是否独立的函数定义
4     Px, Py=margDist(Pxy)              #计算边缘分布
5     PxPy=Px*Py                        #计算边缘分布的积矩阵
6     if PxPy.dtype==float64:           #若数据是浮点型
7         return (abs(PxPy-Pxy)<1e-8).all()
8     return (PxPy==Pxy).all()          #数据是有理数型
```

程序 3.6 验证离散型随机变量 X，Y 是否相互独立的 Python 函数定义

程序的第 3~8 行定义判断随机变量 X 与 Y 是否独立的函数 independent，参数 Pxy 为 (X,Y) 的联合分布律的概率矩阵。第 4 行调用程序 3.2 定义的函数 margDist（第 2 行导入）计算 X 与 Y 的边缘分布律概率序列，分别记为 Px 和 Py（注意 Px 和 Py 分别为列向量和行向量）。第 5 行计算 Px 与 Py 的按元素积矩阵，结果存于 PxPy。第 6~7 行的 **if** 语句，对数组元素类型为浮点型 float 的情形，调用矩阵 abs(PxPy−Pxy)<1e-8 的 all 函数，判断 PxPy 中每个元素与矩阵 Pxy 中对应元素之差的绝对值是否全部小于 10^{-8}。此处，abs(PxPy−Pxy)<1e-8 是一个形状与 Pxy（或 PxPy）相同的矩阵，其中每个元素为 $|p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}-p_{ij}|<10^{-8}$ 是否成立，是为 True，否为 False。若该矩阵的所有元素均为 True，则 all() 返回 True。否则，返回 False。类似地，对于数据类型为 Rational 的情形，第 8 行调用 (Pxy==Pxpy).all()，判断 X 与 Y 的相互独立性。将程序 3.6 的代码写入文件 utility.py，方便调用。

例 3-9 利用程序 3.6 定义的 independent 函数，下列代码为就例 3-5 中无放回抽样和有放回抽样得到的变量 X 与 Y 的独立性的检测。

```
1 import numpy as np                                      #导入numpy
2 from sympy import Rational as R                         #导入Rational
3 from utility import independent                         #导入independent
4 Pxy=np.array([[R(3,10), R(3,10)], [R(3,10), R(1,10)]])  #无放回抽样分布律
5 print('无放回抽样，X与Y相互独立是%s'%independent(Pxy))
6 Pxy=np.array([[9/25, 6/25], [6/25, 4/25]])              #有放回抽样分布律
7 print('有放回抽样，X与Y相互独立是%s'%independent(Pxy))
```

程序 3.7 对无放回抽样和有放回抽样验证离散型随机变量 X，Y 的相互独立性

程序中，第 4 行和第 6 行分别设置 (X,Y) 在无放回抽样下和有放回抽样下的联合分布律。第 5 行和第 7 行分别调用 independent 函数验算两个不同抽样下 X，Y 的相互独立性。注意，第 4 行设置 Pxy 时，元素为 Rational 类型，而第 6 行设置成 float 型。运行程序，输出如下。

```
无放回抽样，X与Y相互独立是False
有放回抽样，X与Y相互独立是True
```

即在无放回抽样下，判断 X 与 Y 不是相互独立的，而在有放回抽样下 X 与 Y 是相互独立的。

练习 3-9 在 Python 中验算练习 3-5 中随机向量 (X,Y) 的独立性判断。

参考答案：见文件 chapter03.ipynb 对应代码。

3.3 连续型 2-维随机向量

3.3.1 连续型 2-维随机向量的联合密度函数

定义 3-5 设 $F(x,y)$ 是 2-维随机向量 (X,Y) 的联合分布函数，若有非负函数 $f(x,y)$ 使得

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

称 (X,Y) 是**连续型 2-维随机向量**，$f(x,y)$ 称为 (X,Y) 的**联合密度函数**，简称为密度函数。

连续型 2-维随机向量的联合分布函数 $F(x,y)$ 在实平面 $\mathbb{R}^2$ 的任一点 (x,y) 处都是连续的。

定理 3-3 设 $f(x,y)$ 为连续型 2-维随机向量 (X,Y) 的密度函数，则

（1）非负性：$f(x,y)\geqslant 0$。

（2）归一性：$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1$。

（3）若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 处连续，则 $f(x,y)=\dfrac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}$。

（4）设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，则 $P((X,Y)\in D)=\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

这些性质与随机变量的密度函数的性质（见定理 2-4）十分相似。图 3-5 展示了一个典型的连续型 2-维随机向量的联合密度函数的图形。其非负性决定了曲面 $z=f(x,y)$ 位于平面 $z=0$ 的上方。归一性说明由曲面 $z=f(x,y)$ 和平面 $z=0$ 围成的空间区域体积为 1。

例 3-10 设连续型 2-维随机向量 (X,Y) 的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ax, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算：(1) 系数 A；(2) 概率 $P(X\geqslant 3/4)$。

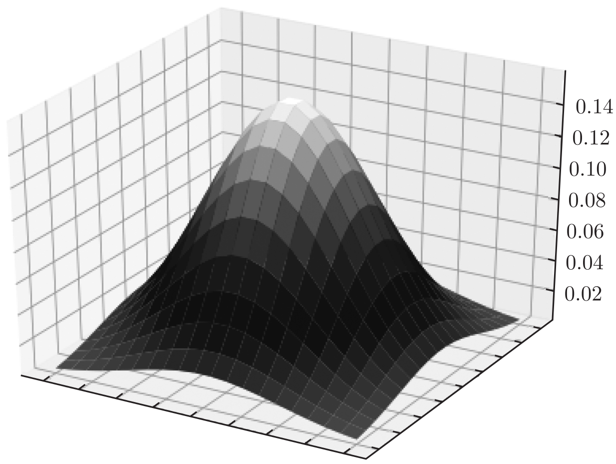

图 3-5　典型的连续型 2-维随机向量的联合密度函数的图形

解：（1）利用 $f(x,y)$ 的归一性，有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\int_0^x Ax\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 Ax\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y=A\int_0^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{A}{3}$$

得 $A=3$。于是

$$f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1, 0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（2）考虑平面上表示事件 $X\geqslant 3/4$ 的区域

$$D=\{(x,y)|x\geqslant 3/4\}=\{(x,y)|3/4\leqslant x<+\infty,-\infty<y<+\infty\}$$

如图 3-6 中直线 $x=3/4$ 右侧部分。而联合密度函数 $f(x,y)$ 非零区域为图中由 $x=1$, $y=0$ 和 $y=x$ 围成的三角形部分。两者的交集为图中深色区域，即 $3/4\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant x$。于是

$$\begin{aligned}P(X\geqslant 3/4)&=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{3/4}^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{3/4}^1\int_0^x 3x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=3\int_{3/4}^1 x\left(\int_0^x\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=3\int_{3/4}^1 x^2\mathrm{d}x=1-\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{37}{64}\end{aligned}$$

练习 3-10　对例 3-10 中随机向量 (X,Y) 计算概率 $P(X<1/4,Y<1/2)$。
参考答案：1/64。

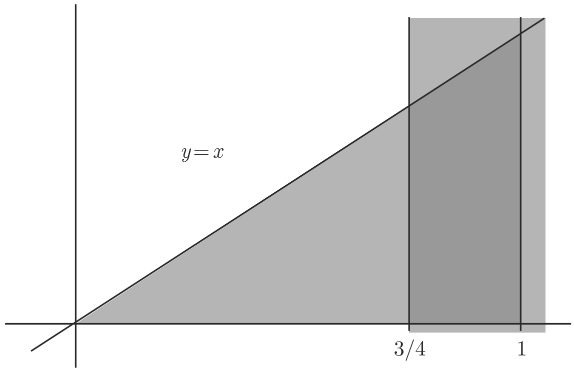

图 3-6　平面上表示事件 $X \geqslant 3/4$ 的区域及 $f(x,y)$ 取非零值的区域

3.3.2　连续型 2-维随机向量的边缘分布与条件分布

1. 边缘分布

设随机向量 (X,Y) 的密度函数为 $f(x,y)$，分布函数为 $F(x,y)$，即

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(s,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

称

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为 X 的**边缘分布函数**，及

$$f_X(x)=F'_X(x)=\left(\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)'=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

称为 X 的**边缘密度函数**。

类似地，$F_Y(y)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x,y)$ 为 Y 的边缘分布函数，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 为 Y 的边缘密度函数。

例 3-11　设二维随机向量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,|y|<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算边缘密度函数 $f_X(x)$。

解：根据边缘密度的计算公式，对任意的 $x\in\mathbb{R}$，$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$。

$f(x,y)$ 的非零区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,|y|<x\}$（如图 3-7 所示），故对 $x\notin(0,1), f(x,y)=0$，此时 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=0$。今设 $x\in(0,1)$。此时 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_{-x}^{x}\mathrm{d}y=2x$。

综上所述，

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

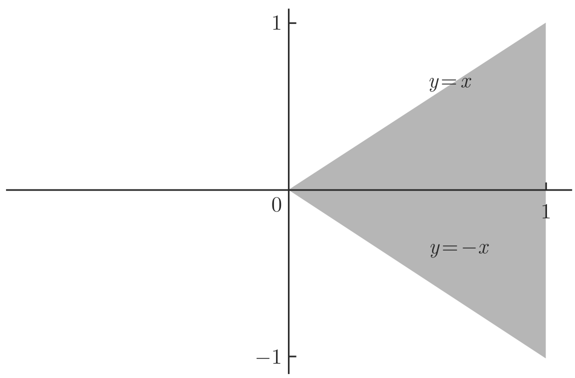

图 3-7　平面上 $f(x,y)$ 取非零值的区域 $D=\{(x,y)|0<x<1,|y|<x\}$

练习 3-11　计算例 3-11 中 2-维随机向量 (X,Y) 的边缘密度函数 $f_Y(y)$。

参考答案：$f_Y(y)=\begin{cases}1+y, & -1<y<0\\ 1-y, & 0\leqslant y<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

例 3-12　设 (X,Y) 的概率密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right)},(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的**2-维正态分布**，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。密度函数 $z=f(x,y)$ 的图形如图 3-5 所示。

为了计算 X 的边缘密度函数 $f_X(x)$，对 $f(x,y)$ 的表达式中的指数的 2 次式进行配方运算

$$\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}=\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2+(1-\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}$$