第5章 Z域分析

5.1 基础理论

1. 求解差分方程

若线性时不变离散时间系统差分方程为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r x(n-r) \tag{5-1}$$

对差分方程求 Z 变换，得到

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z)=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r} X(z) \tag{5-2}$$

若响应为右边信号，对差分方程求 Z 变换，得到

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}\left[Y(z)+\sum_{l=-k}^{-1} y(l) z^{-l}\right]=\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}\left[X(z)+\sum_{m=-r}^{-1} x(m) z^{-m}\right] \tag{5-3}$$

对 $Y(z)$ 求逆 Z 变换得到响应 $y(n)$。

2. 系统函数

由线性时不变系统的输入输出关系 $y(n)=x(n)\otimes h(n)$，等式两边进行 Z 变换，根据卷积定理得到 $Y(z)=X(z)\cdot H(z)$，进而得到系统函数的定义：

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\mathrm{ZT}[h(n)] \tag{5-4}$$

一般情况下，系统函数是一个关于 z 的有理多项式分式，可以表示为

$$H(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{\sum\limits_{i} b_i z^{-i}}{\sum\limits_{k} a_k z^{-k}}=A\,\frac{\prod\limits_{i}(1-c_i z^{-1})}{\prod\limits_{k}(1-d_k z^{-1})} \tag{5-5}$$

其中，a_k 和 b_i 是系统差分方程的系数，c_i 和 d_k 分别是系统函数的零点和极点。

3. 判断系统稳定性和因果性

当系统函数的所有极点都位于单位圆中时，离散 LTI 系统是稳定的。当系统函数的一个极点位于单位圆外或者系统函数的一个 2 阶或更高阶极点位于单位圆上时，离散 LTI 系统是不稳定的。

当系统函数的收敛域包含正无穷大时，离散 LTI 系统是因果的。

5.2 实验示例

例 5.1 求解差分方程

$$y(n)-0.4y(n-1)-0.45y(n-2)=0.45x(n)+0.4x(n-1)-x(n-2),\quad n\geqslant 0$$

其中 $x(n)=\left[2+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u(n)$，初始条件为 $y(-1)=0$；$y(-2)=3$；$x(-1)=2$；$x(-2)=2$。要求列出解的函数表达式。

解：对差分方程作单边 Z 变换：

$$\begin{aligned}&Y^+(z)-0.4\left[y(-1)+z^{-1}Y^+(z)\right]-0.45\left[y(-2)+z^{-1}y(-1)+z^{-2}Y^+(z)\right]\\=&\ 0.45X^+(z)+0.4\left[x(-1)+z^{-1}X^+(z)\right]-\left[x(-2)+z^{-1}x(-1)+z^{-2}X^+(z)\right]\end{aligned}$$

代入初始条件，得到

$$Y^+(z)=\frac{0.45+0.4z^{-1}-z^{-2}}{1-0.4z^{-1}-0.45z^{-2}}X^+(z)+\frac{0.15-2z^{-1}}{1-0.4z^{-1}-0.45z^{-2}}$$

代入 $X^+(z)=\dfrac{3-2z^{-1}}{1-\frac{3}{2}z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}$ 并化简，得到 $Y^+(z)$，它是一个有理函数，化简和部分分式展开可以用 MATLAB 来完成，程序如下：

```
b = [0.45,0.4, - 1];
a = [1, - 0.4, - 0.45];
Y = [0,3];
X = [2,2];
xic = filtic(b,a,Y,X)
bxplus = [3, - 2];
axplus = [1, - 3/2,1/2];
ayplus = conv(a,axplus)
byplus = conv(b,bxplus) + conv(xic,axplus)
[R,p,C] = residuez(byplus,ayplus)
xic  = 0.1500  - 2.0000
ayplus =  1.0000     - 1.9000     0.6500     0.4750     - 0.2250
byplus =  1.5000     - 1.9250   - 0.7250     1.0000
R =  - 2.0000     2.1116     1.7188     - 0.3304
p =    1.0000     0.9000     0.5000     - 0.5000
```

最终可以得到

$$Y^+(z)=-\frac{2}{1-z}+\frac{2.1116}{1-0.9z}+\frac{1.7188}{1-0.5z}-\frac{0.3304}{1+0.5z}$$

从而得到

$$y(n)=\left[2+2.1116(0.9)^n+1.7188(0.5)^n-0.3304(-0.5)^n\right]u(n)$$

例 5.2 求解差分方程

$$y(n)=0.81y(n-2)+x(n)+x(n-1),\quad n>0$$

其中 $y(-1)=y(-2)=2$，$x(n)=0.7^nu(n+1)$。

解：将差分方程两边取单边 Z 变换得

$$\begin{aligned}Y^+(z)&=0.81\left[y(-2)+z^{-1}y(-1)+z^{-2}Y^+(z)\right]+X^+(z)+z^{-1}X^+(z)\\&=0.81\left[2+2z^{-1}+z^{-2}Y^+(z)\right]+\frac{10}{7}\cdot\frac{z+1}{1-0.7z^{-1}}\end{aligned}$$

得

$$Y^{+}(z)=\frac{\left[\frac{10}{7}\cdot\frac{z+1}{1-0.7z^{-1}}+1.62+1.62z^{-1}\right]}{1-0.81z^{-2}}$$

$$=\frac{1.4z+3.02+0.486z^{-1}-1.134z^{-2}}{1-0.7z^{-1}-0.81z^{-2}+0.567z^{-3}}$$

令

$$Y_1^{+}(z)=\frac{3.02+0.486z^{-1}-1.134z^{-2}}{1-0.7z^{-1}-0.81z^{-2}+0.567z^{-3}}$$

$$z^{-1}Y_2^{+}(z)=\frac{1.4}{1-0.7z^{-1}-0.81z^{-2}+0.567z^{-3}}$$

分解 $Y_1^{+}(z)$的 MATLAB 程序实现如下：

```
b = [3.02,0.486, - 1.134];
a = [1, - 0.7, - 0.81,0.567];
[R,p,C] = residuez(b,a)
R =    0.3038     4.8600     - 2.1438
p =  - 0.9000     0.9000       0.7000
```

$$Y_1^{+}(z)=\frac{0.3038}{1+0.9z^{-1}}+\frac{4.86}{1-0.9z^{-1}}+\frac{-2.1438}{1-0.7z^{-1}}$$

$$y_1(n)=[0.3038(-0.9)^n+4.86(0.9)^n-2.1438(0.7)^n]u(n)$$

对于 $Y_2^{+}(z)$，MATLAB 程序实现如下：

```
b = [1.4]; a = [1, - 0.7, - 0.81,0.567];
[R,p,C] = residuez(b,a)
R = 0.3938     3.1500  - 2.1438
p =  - 0.9000     0.9000     0.7000
```

$$y(n)=[0.3038(-0.9)^n+4.86(0.9)^n-2.1438(0.7)^n]u(n)+$$
$$[0.3938(-0.9)^{n+1}+3.15(0.9)^{n+1}-2.1438(0.7)^{n+1}]u(n+1)$$

例 5.3 求解 $y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n-2)=x(n)$，其中 $x(n)=0.25^n u(n)$，初始条件为 $y(-1)=4$，$y(-2)=10$。

解：对差分方程的两边同时进行单边 Z 变换，得到

$$Y^{+}(z)-1.5[y(-1)+z^{-1}Y^{+}(z)]+0.5[y(-2)+z^{-1}y(-1)+z^{-2}Y^{+}(z)]$$
$$=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}$$

代入初始条件并整理得

$$Y^{+}(z)=\frac{(1-0.25z^{-1})^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}+\frac{1-2z^{-1}}{1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}}$$

最后得到

$$Y^{+}(z)=\frac{2-2.25z^{-1}+0.5z^{-2}}{(1-0.5z^{-1})(1-z^{-1})(1-0.25z^{-1})}$$

进行部分分式展开得到

$$Y^{+}(z)=\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{2/3}{1-z^{-1}}+\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}$$

逆 Z 变换后，得到差分方程的全响应解为

$$y(n)=\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]u(n)$$

```
a = [1, - 1.5,0.5];b = 1;
n = [0:7];
x = (1/4).^n;
Y = [4,10];
xic = filtic(b,a,Y);
y1 = filter(b,a,x,xic);
y2 = (1/3) * (1/4).^n + (1/2).^n + (2/3) * ones(1,8);
stem(n,y1,'ro'),hold on
stem(n,y2,' * b');
h = legend('y1','y2');
title('Example 5.3');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
```

运行程序，结果如图 5.1 所示。

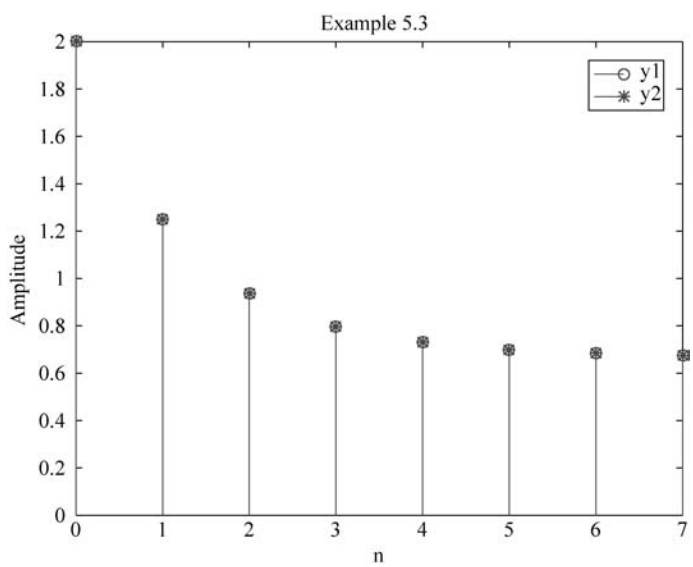

图 5.1　例 5.3 的运行结果

例 5.4 求解差分方程

$$y(n)-2y(n-1)+3y(n-2)=4x(n)-5x(n-1)+6x(n-2)-7x(n-3)$$

其中 $x(n)=u(n)$，初始条件为 $y(-1)=-1, y(-2)=1, x(-1)=1, x(-2)=-1$。

解：对差分方程做单边 Z 变换：

$$Y^+(z)-2[y(-1)+z^{-1}Y^+(z)]+3[y(-2)+z^{-1}y(-1)+z^{-2}Y^+(z)]$$
$$=4X^+(z)-5[x(-1)+z^{-1}X^+(z)]+6[x(-2)+z^{-1}x(-1)+z^{-2}X^+(z)]-$$
$$7[x(-3)+z^{-1}x(-2)+z^{-2}x(-1)+z^{-3}X^+(z)]$$

代入初始条件，得

$$Y^+(z)=\frac{4-5z^{-1}+6z^{-2}-7z^{-3}}{1-z^{-1}+3z^{-2}}X^+(z)+\frac{-16+16z^{-1}-7z^{-2}}{1-z^{-1}+3z^{-2}}$$

MATLAB 程序如下：

```
b = [4, - 5,6, - 7];a = [1, - 2,3];
Y = [ - 1,1];X = [1, - 1];
xic = filtic(b,a,Y,X)
bxplus = [1];
axplus = [1, - 1];
ayplus = conv(a,axplus)
byplus = conv(b,bxplus) + conv(xic,axplus);
[r,p,k] = residuez(byplus,ayplus)
xic =  - 16    16     - 7
ayplus = 1    - 3      5   - 3
r =  - 5.5000 - 1.0607i   - 5.5000 + 1.0607i   - 1.0000
p =   1.0000 + 1.4142i    1.0000 - 1.4142i    1.0000
```

可以得到

$$Y^+(z)=\frac{(-5.5-1.0607\mathrm{j})}{1-(1+1.4142\mathrm{j})z}+\frac{(-5.5+1.0607\mathrm{j})}{1-(1-1.4142\mathrm{j})z}-\frac{1}{1-z}$$
$$=-\frac{11+14z}{1-2z+3z^2}-\frac{1}{1-z}$$

5.3 练习题

5.1 写出题图 3.1 所表示的离散时间系统的差分方程，使用 MATLAB 编程求解系统的单位样值响应 $h(n)$，然后绘制 $h(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=50$ 的结果。使用 MATLAB 编程求解系统的阶跃响应 $g(n)$，然后绘制 $g(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=50$ 的结果。

5.2 写出题图 3.2 所表示的离散时间系统的差分方程，使用 MATLAB 编程求解系统的单位样值响应 $h(n)$，然后绘制 $h(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=50$ 的结果。使用 MATLAB 编程求解系统的阶跃响应 $g(n)$，然后绘制 $g(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=50$ 的结果。

5.3 使用 MATLAB 编程求解如下差分方程并绘制响应 $y(n)$ 从 $n=0$ 到 $n=50$ 的

结果，随后使用 Simulink 图形仿真验证。

(1) $y(n)+3y(n-1)=x(n)$，$x(n)=0.5^n u(n)$，$y(-1)=1$

(2) $y(n)-0.5y(n-1)=x(n)-0.5x(n-1)$，$x(n)=u(n)$，$y(-1)=0$

5.4　使用 MATLAB 编程求解如下系统的单位样值响应 $h(n)$，求解激励 $x(n)=\cos\left(\frac{\pi n}{3}\right)$时，响应 $y(n)$从 $n=0$ 到 $n=50$ 的结果，随后使用 Simulink 图形仿真验证。

(1) $H(z)=\dfrac{z+1}{z-0.5}$

(2) $H(z)=(1+z^{-1}+z^{-2})^2$