第3章

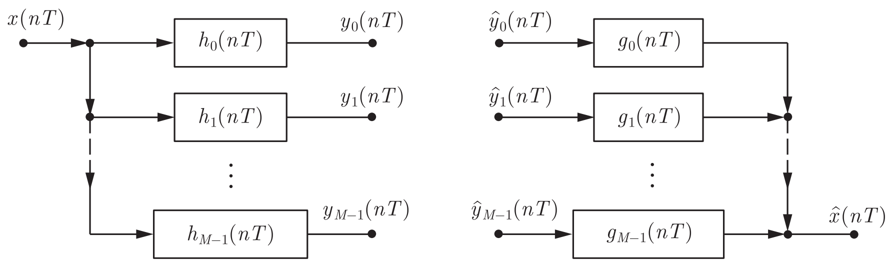
两通道滤波器组

本章要点

- 什么是滤波器组？其基本结构和作用是什么？
- 滤波器组的失真来源有哪些？如何避免失真？
- 两通道滤波器组的基本结构及输入、输出关系是什么？
- 滤波器组无混叠失真和完全重构的条件是什么？
- 什么是两通道正交镜像滤波器组（QMFB）？其特点是什么？
- 什么是两通道共轭正交滤波器组（CQFB）？其特点是什么？
- 什么是仿酉滤波器组？其特点是什么？
- 如何设计满足完全重构的滤波器组？有哪些方法？
- 什么是功率互补滤波器？满足功率互补条件的滤波器是否是线性相位的？

3.1 滤波器组的基本概念

滤波器组（filter bank），顾名思义，是由多个滤波器组成的系统。具体又可分为分析（analysis）滤波器组和综合（synthesis）滤波器组，结构分别如图 3.1（a）和图 3.1（b）所示。每个滤波器对应的支路称为通道（channel）。

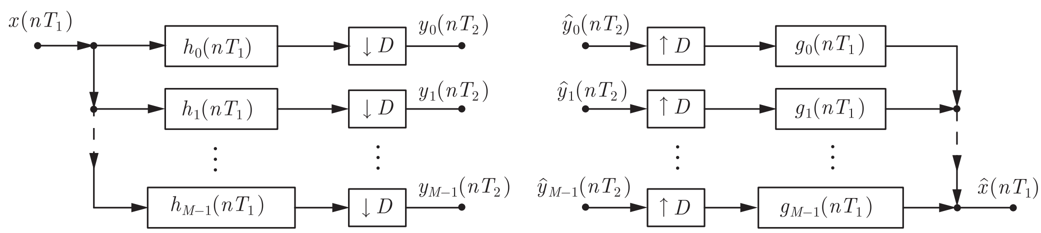


（a）分析滤波器组　　（b）综合滤波器组

图 3.1　滤波器组的基本结构

分析滤波器组的作用是将信号分解为多个不同的子带（subband），进而可以对各子带信号进行单独地处理。这个过程也称为信号分解（signal decomposition）。与之相反，综合滤波器组的作用是将各子带信号重新组合起来，以形成新的信号。这个过程又称为信号重构（signal reconstruction）。

在分析端，由于子带信号的带宽通常比输入信号的带宽小得多，因此可以在滤波之后放置一个 D 倍抽取器，以降低各支路的采样率，如图 3.2（a）所示。相应地，在综合端可在滤波之前先对各子带信号进行 D 倍内插，以恢复至原始的采样率，如图 3.2（b）所示。对于 M 通道均匀（uniform）滤波器组而言，每个通道的带宽为 $2\pi/M$。为了避免子带信号抽取之后发生混叠，抽取因子应满足 $D \leqslant M$。当 $D = M$ 时，称为最大抽取（maximally decimated）或临界采样（critically sampled）滤波器组。当 $D < M$ 时，则称为过采样（over-sampled）或冗余（redundant）滤波器组。本书主要讨论最大抽取滤波器组。



（a）分析端　　（b）综合端

图 3.2　含有抽取与内插的滤波器组结构（$D \leqslant M$）

通常，信号经过分解和重构之后会产生一定的失真，主要包括：混叠失真（aliasing distortion，ALD）、幅度失真（amplitude distortion，AMD）、相位失真（phase distortion，PHD），以及子带量化误差（subband quantization error）等。其中前三类失真源于滤波器组的内部结构，而最后一类失真发生在子带处理过程中（如量化、编码等），与滤波器组的自身特性无关。因此在设计滤波器组的过程中，主要考虑前三类失真。如果能够消除这三类失真，则称该滤波器组是完全重构（perfect reconstruction，PR）的，此时重构信号可以表示为原始信号的一个延迟，且至多在幅度上相差一个倍数，即

$$\hat{x}(nT) = cx[(n - n_0)T] \tag{3.1.1}$$

式中，c 为非零常数；n_0 为整数。

完全重构问题是滤波器组的主要研究内容之一，本章余下部分将进行详细讨论。

3.2　两通道滤波器组

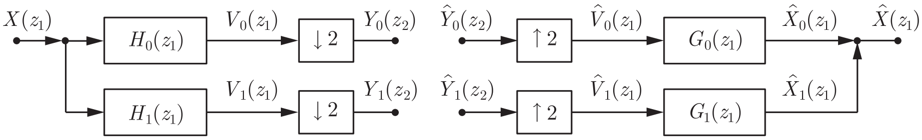
两通道滤波器组是最基本也是最常用的滤波器组，结构如图 3.3所示，其中 H_0, G_0 为低通滤波器，H_1, G_1 为高通滤波器①。在实际应用中，将信号分解为低频分量和高频分量

① 稍后会解释分析端与综合端的关系。

是一种十分常见的处理方式。以子带编码为例，已知信号 $x(nT_1)$ 的采样率为 $F_1=1/T_1$，若采用 16bit 编码，则码率为 $16F_1$bps。假设信号的能量主要集中在低频部分，可以利用两通道滤波器组对该信号进行分解，得到信号的低频分量 $y_0(nT_2)$ 和高频分量 $y_1(nT_2)$。由于两个子带包含的信息量不同，可以选择不同的字长进行编码。如对 $y_0(nT_2), y_1(nT_2)$ 分别采用 16bit 与 8bit 编码，则总码率为

$$F_1/2\times 16+F_1/2\times 8=12F_1\ (\text{bps})$$

其中，$F_1/2$ 表示子带信号的采样率。相较于直接编码，码率减少 1/4。因此在保证信号主要信息不损失的情况下实现了数据压缩。



（a）分析端　　（b）综合端

图 3.3　二通道滤波器组

3.2.1　两通道滤波器组的输入、输出关系

下面分析两通道滤波器组的输入、输出关系。方便起见，以下全部采用 z 变换进行表示。对于分析端，根据抽样率转换关系，不难得到

$$\begin{aligned}Y_k(z_2)&=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1}V_k(z_1W^l)=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{1}X(z_1W^l)H_k(z_1W^l)\\&=\frac{1}{2}[X(z_1)H_k(z_1)+X(-z_1)H_k(-z_1)],\ k=0,1\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

式中，$W=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi}$, $z_2=z_1^2$。

式(3.2.1)也可写作矩阵形式：

$$\begin{bmatrix}Y_0(z_2)\\Y_1(z_2)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}H_0(z_1)&H_0(-z_1)\\H_1(z_1)&H_1(-z_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(z_1)\\X(-z_1)\end{bmatrix}\tag{3.2.2}$$

对于综合端，易知各支路信号为

$$\hat{X}_k(z_1)=\hat{V}_k(z_1)G_k(z_1)=\hat{Y}_k(z_2)G_k(z_1),\ k=0,1\tag{3.2.3}$$

故重构信号为

$$\hat{X}(z_1)=\sum_{k=0}^{1}\hat{X}_k(z_1)=\sum_{k=0}^{1}\hat{Y}_k(z_2)G_k(z_1)\tag{3.2.4}$$

或写成矩阵形式：

$$\hat{X}(z_1)=\begin{bmatrix}G_0(z_1) & G_1(z_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{Y}_0(z_2)\\ \hat{Y}_1(z_2)\end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

注意到在上述推导过程中使用了 z_1, z_2 以区分信号所处的采样率。当然也可以利用 $z_2=z_1^2$ 的关系将表达式统一为同一变量，读者可自行写出，不再赘述。

3.2.2 无混叠失真条件

混叠失真源自滤波器组内部的抽样率转换过程，是影响滤波器组性能的主要因素之一，也是在滤波器组设计过程中首先需要考虑的问题。在理想情况下，滤波器组将信号划分为互不交叠的子带，进而可以最大抽取因子进行抽取，理论上来讲是没有混叠的。而在实际应用中，滤波器的过渡带宽不可能为零。为了不丢失原始信息，应尽量保证滤波器通带内没有严重衰减，所以在实际设计中会把过渡带延伸到相邻滤波器的频带中，从而在过渡带内会产生混叠。

以两通道滤波器组为例，图 3.4（a）给出了原始输入信号频谱，图 3.4（b）为低通滤波器 H_0 与高通滤波器 H_1 的幅频响应示意图（注意这里暂不考虑幅度失真）。可以看出两个滤波器的过渡带有交叠。相应地，图 3.4（c）、图 3.4（d）分别给出了原始信号经过低通滤波和高通滤波之后的频谱，图 3.4（e）、图 3.4（f）则为经过 2 倍抽取之后的各子带频谱。可以明显看出，此时子带信号发生了混叠。对于综合端，各子带信号先经过 2 倍内插，此时产生了镜像频谱。图 3.4（g）、图 3.4（h）给出了滤除镜像之后的频谱。最后，将两个子带信号的频谱叠加得到重构信号的频谱，如图 3.4（i）所示。显然，相较于原始信号，频谱发生了一定的失真，这就是由于混叠造成的。

为了定量描述混叠失真，下面通过数学公式推导重构信号与原始信号的关系。在此不考虑任何子带处理，故令 $\hat{Y}_k(z_2)=Y_k(z_2), k=0,1$，结合式(3.2.2)与式(3.2.5)，有

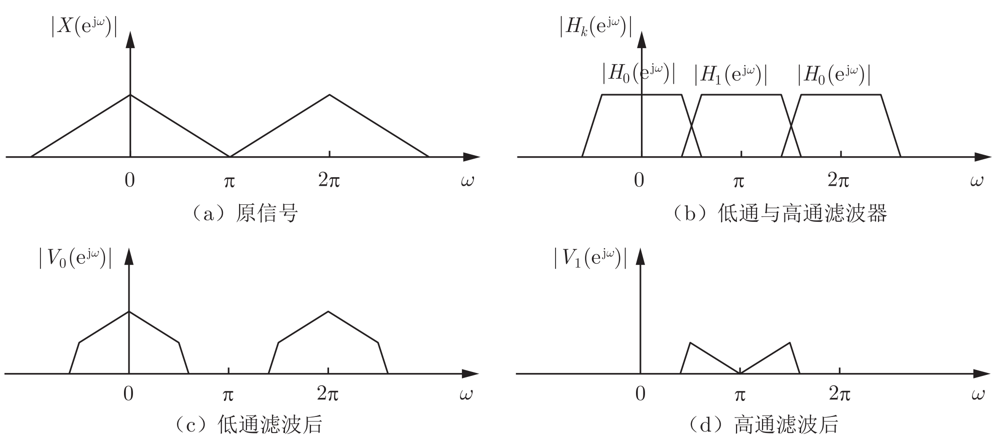
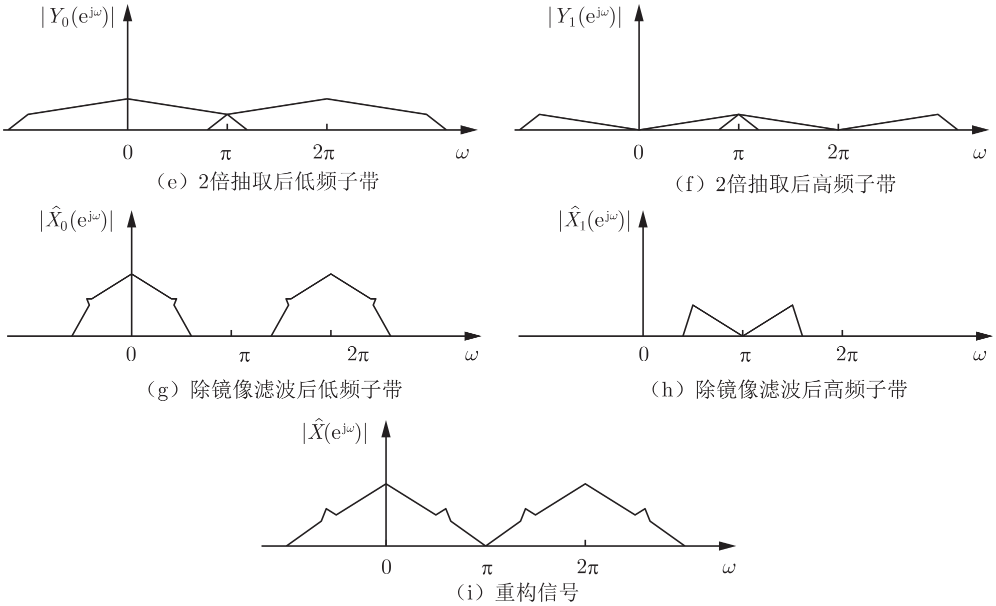


图 3.4　两通道滤波器组各阶段信号的频谱



（e）2倍抽取后低频子带 （f）2倍抽取后高频子带

（g）除镜像滤波后低频子带 （h）除镜像滤波后高频子带

（i）重构信号

图 3.4 （续）

$$\begin{aligned}\hat{X}(z_1) &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}G_0(z_1) & G_1(z_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}H_0(z_1) & H_0(-z_1)\\ H_1(z_1) & H_1(-z_1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X(z_1)\\ X(-z_1)\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{2}X(z_1)[H_0(z_1)G_0(z_1)+H_1(z_1)G_1(z_1)]\\ &\quad+\frac{1}{2}X(-z_1)[H_0(-z_1)G_0(z_1)+H_1(-z_1)G_1(z_1)]\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

注意到上式变量均为 z_1，为了便于分析，下面省略下标，并记

$$T(z)=\frac{1}{2}[H_0(z)G_0(z)+H_1(z)G_1(z)]\tag{3.2.7}$$

$$A(z)=\frac{1}{2}[H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)]\tag{3.2.8}$$

于是式(3.2.6)可记作

$$\hat{X}(z)=T(z)X(z)+A(z)X(-z)\tag{3.2.9}$$

上式说明，重构信号 $\hat{X}(z)$ 由原始信号 $X(z)$ 与其混叠分量 $X(-z)$ 组成。显然，若要求滤波器组无混叠失真，应令 $A(z)=0$，此时滤波器组的输入、输出关系式为

$$\hat{X}(z)=T(z)X(z)\tag{3.2.10}$$

称 $T(z)$ 为滤波器组的总体传递函数（overall transfer function）或失真函数（distortion function）。

结合上述分析，得到两通道滤波器组无混叠的充要条件。

命题 3.1 两通道滤波器组无混叠的充要条件为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2T(z) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.11}$$

下面分析是否存在相应的 H_0, H_1 与 G_0, G_1 满足式(3.2.11)。不妨将式(3.2.11)理解为线性方程组，记

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \tag{3.2.12}$$

称 $\boldsymbol{H}(z)$ 为调制矩阵（modulation matrix）①。根据线性代数知识，可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \boldsymbol{H}^{-1}(z) \begin{bmatrix} 2T(z) \\ 0 \end{bmatrix} &= \frac{2T(z)}{\det \boldsymbol{H}(z)} \begin{bmatrix} H_1(-z) & -H_1(z) \\ -H_0(-z) & H_0(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2T(z)}{\det \boldsymbol{H}(z)} \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.14}$$

式中，$\det \boldsymbol{H}(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)$。

式(3.2.14)实际给出了 $G_0(z), G_1(z)$ 的一般形式。特别地，若取

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1(-z) \\ -H_0(-z) \end{bmatrix} \tag{3.2.15}$$

则

$$2T(z) = H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z) = H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z) = \det \boldsymbol{H}(z)$$

这说明式(3.2.15)是满足无混叠条件的一个解。结合物理意义来看，若 $H_0(z), H_1(z)$ 分别为低通和高通滤波器，中心频率分别为 0 和 π。则 $G_0(z) = H_1(-z)$ 是将 $H_1(z)$ 的中心频率搬移至 0，因此为低通滤波器；类似地，$G_1(z) = -H_0(-z)$ 为高通滤波器。

3.2.3 完全重构条件

根据式(3.2.10)，在无混叠条件下，重构信号与原始信号的关系完全由总体传递函数 $T(z)$ 刻画。据此还可以得到滤波器组无其他失真的条件。例如，若 $T(z)$ 为全通函数（all-pass function），即 $|T(z)| = c \neq 0$，则

$$|\hat{X}(z)| = |T(z)X(z)| = c|X(z)| \tag{3.2.16}$$

---

① 有些文献也将调制矩阵定义为

$$\boldsymbol{H}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix} \tag{3.2.13}$$

与本书定义相比较，两者仅相差一个转置，在一些推导中稍有区别，但不会影响矩阵的性质及相关结论。

此时滤波器组无幅度失真。

若 $T(z)$ 具有线性相位，即 $\angle T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=-n_0\omega$，则

$$\angle\hat{X}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\angle X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+\angle T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})=\angle X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})-n_0\omega \tag{3.2.17}$$

那么滤波器组无相位失真。

若要求滤波器组既无幅度失真也无相位失真，则 $T(z)$ 只能是纯延迟，即 $T(z)=cz^{-n_0}$，其中 c 为非零常数，n_0 为整数。此时输入、输出关系为

$$\hat{X}(z)=cz^{-n_0}X(z) \tag{3.2.18}$$

式(3.2.18)即为式(3.1.1)在 z 变换域的表达。

综合上述分析，得到完全重构滤波器组的充要条件。

命题 3.2　两通道滤波器组完全重构的充要条件为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2cz^{-n_0} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.2.19}$$

式中，c 为非零常数；n_0 为整数。

式(3.2.19)还可以扩展为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_0(z) & G_0(-z) \\ G_1(z) & G_1(-z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2cz^{-n_0} & 0 \\ 0 & 2c(-z)^{-n_0} \end{bmatrix} \tag{3.2.20}$$

式中，等式左端的两个矩阵分别为 H_0,H_1 和 G_0,G_1 构成的调制矩阵。特别地，当 n_0 为偶数时，

$$\boldsymbol{H}(z)\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(z)=2cz^{-n_0}\boldsymbol{I} \tag{3.2.21}$$

或等价地，

$$\boldsymbol{G}(z)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(z)=2cz^{-n_0}\boldsymbol{I} \tag{3.2.22}$$

因此式(3.2.21)或式(3.2.22)也可作为完全重构的一个充分条件①。

在滤波器组的理论分析中，矩阵是一种常用的形式。其优势在于数学表示更紧凑，同时可将物理问题抽象为数学问题，并借助数学相关方法来进行分析求解。3.4节将详细讨论完全重构滤波器组的构造方法。

3.3　正交镜像滤波器组

正交镜像滤波器组（quadrature mirror filter bank，QMFB）是一种典型的两通道滤波器组，最早应用于语音子带编码[13] 中。QMFB 分析端的滤波器具有如下关系：

$$H_1(z)=H_0(-z) \tag{3.3.1}$$

① 对于理论分析而言，为了保证结论的严谨性和完整性，通常希望得到滤波器组完全重构的充要条件。而在实际应用中，目标是设计满足完全重构的滤波器组，这时只要满足充分条件就足够了。本书不刻意强调充分条件和充要条件的差别。

或在频域表示为

$$H_1(e^{j\omega}) = H_0(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{3.3.2}$$

即 $H_1(e^{j\omega})$ 是由 $H_0(e^{j\omega})$ 频移 π 得到的。若 $H_0(e^{j\omega})$ 是低通滤波器，则 $H_1(e^{j\omega})$ 是高通滤波器，两者的幅频响应如图 3.5所示。注意到 $|H_0(e^{j\omega})|$ 与 $|H_1(e^{j\omega})|$ 关于 π/2 镜像对称，这正是其名称中“正交镜像”①的由来。

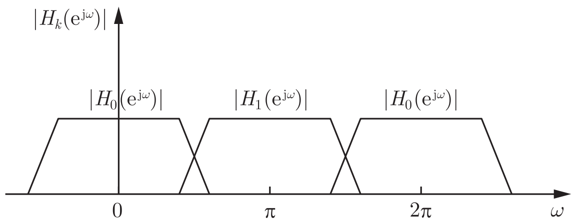


图 3.5　两通道 QMFB 的幅频特性

若要求 QMFB 无混叠失真，可令综合端的滤波器组为

$$G_0(z) = H_1(-z) = H_0(z) \tag{3.3.3a}$$

$$G_1(z) = -H_0(-z) = -H_1(z) \tag{3.3.3b}$$

由此可见，无混叠 QMFB 仅由一个滤波器 $H_0(z)$ 决定，且分析端和综合端的低通滤波器完全相同，高通滤波器相差一个负号（这意味着幅频响应相同，相频响应相差 π/2）。以下讨论均假设 QMFB 无混叠。

3.3.1　QMFB 的多相结构

对 $H_0(z)$ 进行第一型多相分解，

$$H_0(z) = E_{00}(z^2) + z^{-1}E_{01}(z^2) \tag{3.3.4}$$

相应地，

$$H_1(z) = H_0(-z) = E_{00}(z^2) - z^{-1}E_{01}(z^2) \tag{3.3.5}$$

式(3.3.4)与式(3.3.5)可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{00}(z^2) \\ z^{-1}E_{01}(z^2) \end{bmatrix} \tag{3.3.6}$$

① “正交”源于英文 quadrature，本意是相位差 π/2，即采样率的四分之一（2π/4），这与几何意义（内积空间）上的正交（orthogonality）并非同一含义。此外值得说明的是，并非所有的两通道滤波器组都满足式(3.3.1)，但由于 QMFB 的起源较早，且最具有代表性，以致后续的许多研究者习惯将两通道滤波器组统称为 QMFB，甚至将该名称推广至多通道滤波器组[8,14]，这时 QMFB 已经失去了原本的含义。

图 3.6给出了分析端的多相结构。注意到此时两条支路并非平行的关系，而是有相互作用，这种结构又称为格形（lattice）结构。

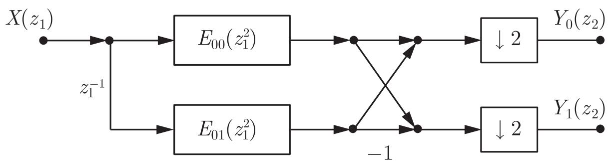


图 3.6　QMFB 分析端的格形结构

类似地，对于综合端的滤波器有

$$G_0(z) = H_0(z) = E_{00}(z^2) + z^{-1}E_{01}(z^2) \tag{3.3.7}$$

$$G_1(z) = -H_0(-z) = -E_{00}(z^2) + z^{-1}E_{01}(z^2) \tag{3.3.8}$$

或写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{00}(z^2) \\ z^{-1}E_{01}(z^2) \end{bmatrix} \tag{3.3.9}$$

由此可以看出，分析端与综合端的滤波器均由 $H_0(z)$ 的两个多相成分决定。图 3.7给出了综合端的多相结构。

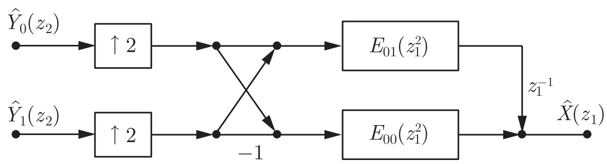
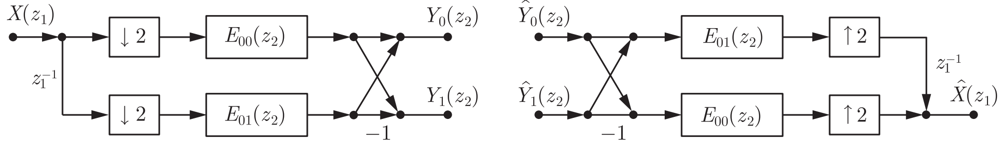


图 3.7　QMFB 综合端的格形结构

进一步，利用多抽样率网络的恒等关系，可以将上述的格形结构转换为一种高效结构。以分析端为例，注意到转换前的计算是在高抽样率一侧。现将 2 倍抽取放到各支路中去，再与 $E_{00}(z^2)$ 和 $E_{01}(z^2)$ 交换顺序，于是便将计算转化为在低抽样率一侧进行。综合端的分析类似。图 3.8给出了 QMFB 格形结构的高效实现方式。



（a）分析端　　　　（b）综合端

图 3.8　QMFB 的高效格形结构

不妨具体分析一下转换前后的计算量。假设分析滤波器 $H_0(z)$（同 $H_1(z)$）的长度为 N，采样率为 F，则分析端的总计算量为 $2NF$（MPS）；若采用高效实现方式，各支路的

多相滤波器长度为 $N/2$，抽样率为 $F/2$，分析端的总计算量为 $NF/2$（MPS），计算量减少为原来的 1/4。对于综合端可以得到同样的结果。

3.3.2 QMFB 的误差分析

本节分析两通道 QMFB 是否满足完全重构。在无混叠条件下，根据式(3.2.6)及式(3.3.3)，输入、输出关系式为

$$\hat{X}(z) = T(z)X(z) = \frac{1}{2}\left[H_0^2(z) - H_1^2(z)\right]X(z) \tag{3.3.10}$$

因此，完全重构的充要条件为

$$T(z) = \frac{1}{2}\left[H_0^2(z) - H_1^2(z)\right] = cz^{-\lambda} \tag{3.3.11}$$

于是问题归结为是否存在 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 使得式(3.3.11)成立。

假设 $H_0(z), H_1(z)$ 均为 FIR 滤波器，注意到如果 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 具有线性相位，则 $T(z)$ 也是线性相位，因此不存在相位失真。反之，若 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 不是线性相位，则 $T(z)$ 也非线性相位。因此，为了满足式(3.3.11)应要求 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 都具有线性相位。对 $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$ 进行第一型多相分解，如式(3.3.4)与式(3.3.5)所示，于是得

$$T(z) = \frac{1}{2}\left[H_0^2(z) - H_1^2(z)\right] = 2z^{-1}E_{00}(z^2)E_{01}(z^2) \tag{3.3.12}$$

此时完全重构条件转化为

$$T(z) = 2z^{-1}E_{00}(z^2)E_{01}(z^2) = cz^{-\lambda} \tag{3.3.13}$$

上式成立存在两种可能的情况。第一种为

$$E_{00}(z^2) = \frac{1}{2}cz^{-(\lambda-1)}/E_{01}(z^2)$$

这意味着 $E_{00}(z)$ 或 $E_{01}(z)$ 中至少有一个为有理函数，即 IIR 滤波器。进而 $H_0(z)$ 和 $H_1(z)$ 也是 IIR 滤波器，与假设不符。

第二种情况为 $E_{00}(z)$, $E_{01}(z)$ 均为纯延迟，即

$$E_{00}(z) = c_0 z^{-n_0},\ E_{01}(z) = c_1 z^{-n_1}$$

式中，c_0, c_1 均为常数；n_0, n_1 均为整数。于是 $T(z) = 2c_0c_1z^{-2(n_0+n_1)-1}$，故滤波器组满足完全重构。然而注意到此时，

$$H_0(z) = c_0 z^{-2n_0} + c_1 z^{-2n_1-1} \tag{3.3.14}$$

$$H_1(z) = c_0 z^{-2n_0} - c_1 z^{-2n_1-1} \tag{3.3.15}$$

上述形式的滤波器没有平坦的通带及快速衰减的阻带，实际应用价值不大。举例来讲，令 $c_0 = c_1 = 1/\sqrt{2}, n_0 = n_1 = 0$，则得到 Haar 滤波器组：

$$H_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + z^{-1}) \tag{3.3.16}$$

$$H_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - z^{-1}) \tag{3.3.17}$$

相应地，频率响应为

$$H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \sqrt{2}\cos\frac{\omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega/2} \tag{3.3.18}$$

$$H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = \sqrt{2}\sin\frac{\omega}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\omega-\pi)/2} \tag{3.3.19}$$

注意到，$|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|, |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$ 均为三角函数，结合图 3.9来看，两者既没有平坦的通带，也没有快速衰减的阻带，因此不具备良好的幅频特性①。

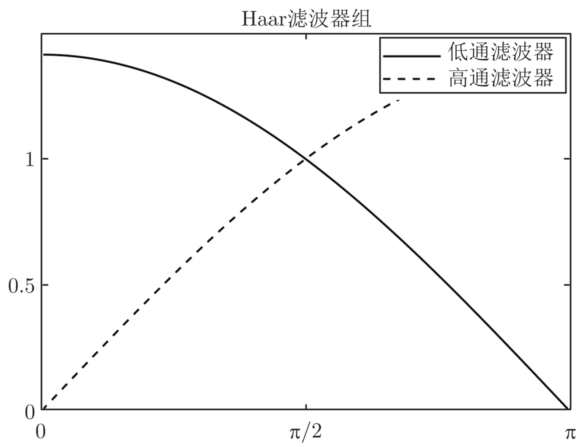


图 3.9　Haar 滤波器组的幅频响应

综合上述分析，QMFB 在要求 $H_0(z), H_1(z)$ 都是 FIR 线性相位的情况下，既要满足完全重构，又要使滤波器具有良好的幅频特性是不可行的。在实际应用中，可以考虑以下折中方案：

① FIR QMFB：要求 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 都是 FIR 且具有线性相位，在无混叠失真、无相位失真的条件下，尽可能减小幅度失真，从而近似实现完全重构。

---

① 尽管 Haar 滤波器组的幅频特性不理想，但它在小波分析理论中尤为重要。注意到滤波器的冲激响应为

$$h_0[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta[n] + \delta[n-1]\right)$$

$$h_1[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\delta[n] - \delta[n-1]\right)$$

因此 $H_0(z)$ 的作用是对信号相邻两点求平均（可忽略倍数上的差异，下同），$H_1(z)$ 则为相邻两点求差。经过分析滤波器组，信号被分解为其平均值（低频信息）和局部差值（高频信息）。这种计算方式即为 Haar 小波变换。

② IIR QMFB：要求 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 都是 IIR，保证无混叠失真和无幅度失真，而相位失真由额外的相位均衡器解决，从而近似实现完全重构。

③ 共轭正交滤波器组：修正 $H_0(z)$ 与 $H_1(z)$ 的关系，从而实现完全重构。

下面对前两种方案进行简要讨论，第三种方案将在 3.3.3节详细介绍。

1. FIR QMFB 的设计

首先来分析滤波器组幅度失真的原因。幅度失真主要来源于滤波器幅频特性中的波纹（误差容限）、截止频率的位置以及过渡带的陡峭程度。其中波纹是不可避免的，过渡带宽主要由滤波器阶数决定，这里主要分析截止频率的位置。以图 3.10为例，若 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 的幅频响应如图 3.10（a）所示，两者在 π/2 处不重叠，则重构信号会在 π/2 附近出现频谱损失。损失的信息是无法复原的，因此在设计滤波器时应当避免这种情况。也就是说允许 $H_0(z)$、$H_1(z)$ 在 π/2 处有重叠，如图 3.10（b）所示。此时子带信号会有混叠，但混叠成分可以通过综合滤波器组消除。而最终的重构信号会在 π/2 附近有幅度偏差。因此减小幅度失真的途径就是优化传递函数 $T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$，使其幅度接近于 1（或常数 c）。

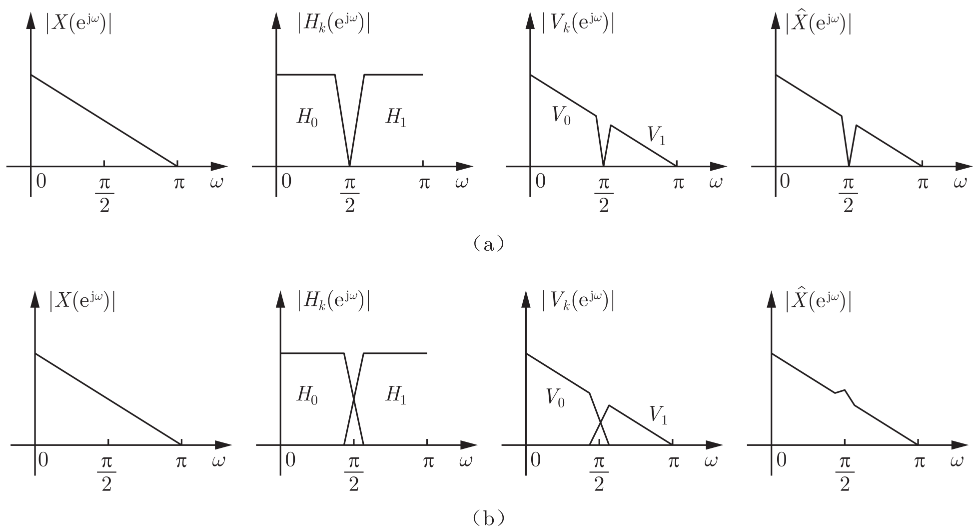


图 3.10 FIR QMFB 幅度失真原因分析

以下假设 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 都是具有线性相位的 FIR 滤波器。不妨设滤波器的长度为 N，则

$$H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M}|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$$

$$H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)}) = (-1)^M \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega M}|H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|$$

式中，$M = \dfrac{N-1}{2}$。于是

$$T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \frac{1}{2}[H_0^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) - H_1^2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})]$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}\left[|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 - (-1)^{N-1}|H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}\left[|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 - |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\right], & N \text{ 为奇数} \\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}\left[|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 + |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\right], & N \text{ 为偶数} \end{cases}
\end{aligned}
$$

若 N 为奇数，注意到 $|H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = |H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)})|$，故

$$
T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi/2}) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}\left[|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 - |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\right]\Big|_{\omega=\pi/2} = 0
$$

这意味着重构信号在 $\pi/2$ 处有严重的幅度失真。为避免此类情况，N 只能取偶数。此时，若

$$
|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 + |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 = c \tag{3.3.20}
$$

则 $T(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \dfrac{1}{2}c\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega(N-1)}$，滤波器组满足完全重构。

不失一般性，可以令式(3.3.20)中 $c=1$，称满足该式的滤波器 $H_0(z), H_1(z)$ 为功率互补滤波器（power-complementary filters）。理论分析表明[15]，若 $H_0(z), H_1(z)$ 为功率互补滤波器，同时又要求具有线性相位，则一般形式为

$$
H_0(z) = \frac{1}{2}(z^{-k_1} + z^{-k_2}),\ H_1(z) = \frac{1}{2}(z^{-k_1} - z^{-k_2}) \tag{3.3.21}
$$

相应地，幅频响应为

$$
|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \cos(K\omega),\ |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})| = \sin(K\omega) \tag{3.3.22}
$$

式中，$K = (k_1 - k_2)/2$。根据前文的分析，这种设计出来的线性相位滤波器缺乏良好的幅频特性。因此实际设计中只能要求

$$
|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 + |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 = |H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 + |H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)})|^2 \approx 1 \tag{3.3.23}
$$

Johnston 提出一种基于优化的设计方法[16]，可以得到一组近似完全重构的 FIR QMFB，最小化目标函数为

$$
\begin{aligned}
E &= \alpha\int_{\omega_\mathrm{s}}^{\pi}|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2\mathrm{d}\omega + (1-\alpha)\int_0^{\pi}\left(1 - |H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 - |H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)})|^2\right)^2\mathrm{d}\omega \\
&:= \alpha E_1 + (1-\alpha)E_2
\end{aligned}
$$

式中，ω_s 为阻带边缘频率；E_1 表示阻带的能量；E_2 为完全重构误差的能量（即波纹误差的能量）；α 为权重。具体方法参见文献[16]。

2. IIR QMFB 的设计

实现完全重构的另一种思路是在无混叠失真的条件下，利用 IIR 全通滤波器消除幅度失真，而相位失真的问题则依靠全通均衡器解决。设 $H_0(z), H_1(z)$ 的多相分解为

$$H_0(z) = Q_{00}(z^2) + z^{-1}Q_{01}(z^2) \tag{3.3.24a}$$

$$H_1(z) = Q_{00}(z^2) - z^{-1}Q_{01}(z^2) \tag{3.3.24b}$$

式中，$Q_{00}(z), Q_{01}$ 均为全通函数，即

$$Q_{00}(z) = \prod_k \frac{z^{-1} - a_k}{1 - a_k z^{-1}}, Q_{01}(z) = \prod_k \frac{z^{-1} - b_k}{1 - b_k z^{-1}} \tag{3.3.25}$$

于是

$$T(z) = \frac{1}{2} z^{-1} Q_{00}(z^2) Q_{01}(z^2) \tag{3.3.26}$$

也为全通函数，因而保证了滤波器组无幅度失真。

研究表明[17-18]，许多典型的滤波器（如具有奇数阶的巴特沃斯、切比雪夫或椭圆半带滤波器等）都可以表示为两个全通函数的和，这意味着多相表示对 IIR 滤波器同样有效。此外，若 $H_0(z)$ 为 IIR 低通滤波器且 $|H_0(z)| \leqslant 1$，则总可以找到一个 IIR 高通滤波器 $H_1(z)$ 使得它与 $H_0(z)$ 满足功率互补条件[14,19]，即

$$|H_0(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 + |H_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})|^2 = 1 \tag{3.3.27}$$

具体分析及设计实例可参见文献[19]。

3.3.3 共轭正交滤波器组

根据 3.3.2节的分析，QMFB 在满足完全重构的条件下，滤波器只能是纯延迟的线性组合形式，幅频特性不佳。造成这一问题的重要因素之一在于约束 $H_1(z) = H_0(-z)$。如果修正 $H_0(z)$ 与 $H_1(z)$ 的关系，则可以在满足完全重构的条件下，优化滤波器的幅频特性。下面考虑 $H_0(z)$, $H_1(z)$ 均为 FIR 且具有如下关系：

$$H_1(z) = -z^{-N} H_0(-z^{-1}) \tag{3.3.28}$$

式中，N 为奇数。称满足式(3.3.28)的滤波器组为共轭正交滤波器组（conjugate quadrature filter bank，CQFB）[20-21]。注意到如果 $H_0(z)$ 为因果滤波器，则 $H_0(-z^{-1})$ 为非因果滤波器，因此可通过选取合适的 z^{-N} 保证 $H_1(z)$ 为因果滤波器。

下面分析 CQFB 是否满足完全重构。令 $G_0(z) = H_1(-z), G_1(z) = -H_0(-z)$ 以满足无混叠条件，根据式(3.2.7)，滤波器组的传递函数为

$$T(z) = \frac{1}{2}\left[H_0(z)H_1(-z) - H_1(z)H_0(-z)\right]$$

$$= \frac{1}{2} z^{-N}[H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_1(z)H_1(z^{-1})] \tag{3.3.29}$$

上式推导利用了 N 为奇数。显然，当

$$H_0(z)H_0(z^{-1}) + H_1(z)H_1(z^{-1}) = 1 \tag{3.3.30}$$

时，滤波器组满足完全重构。这意味着 $H_0(z), H_1(z)$ 依然是功率互补滤波器。根据 3.3.2节的分析可知，若 $H_0(z), H_1(z)$ 满足功率互补条件且具有线性相位，则幅频响应只能是三角函数的形式。因此，为了设计具有良好幅频特性的滤波器，须放弃 $H_0(z), H_1(z)$ 为线性相位的条件，但此时仍可以保证 $T(z)$ 是线性相位的。

现令 $P(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$，则完全重构等价于

$$P(z) + P(-z) = 1 \tag{3.3.31}$$

或在频域表示为

$$P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) + P(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\pi)}) = 1 \tag{3.3.32}$$

上式表明，$P(z)$ 为半带滤波器。因此，完全重构问题转化为半带滤波器的设计问题。当半带滤波器 $P(z)$ 确定之后，可依据谱分解定理求得 $H_0(z)$。

上述构造思路最早由 Smith 等人于 1984 年提出[20]，Mintzer 在文献[22]中也阐述了类似的思想。具体的设计方法与实例可参见文献[20-22]。

3.4　仿酉滤波器组

本节介绍满足完全重构条件的两通道滤波器组的一般形式。首先给出滤波器组的多相结构，并分析基于多相矩阵的完全重构条件，进而引入仿酉矩阵的概念，并介绍仿酉滤波器组的设计方法。

3.4.1　两通道滤波器组的多相结构

多相结构是滤波器组的一种高效实现结构。3.3.1节给出了 QMFB 的多相结构，即格形结构。本节将给出一般的两通道滤波器组的多相结构。

对 $H_0(z)$、$H_1(z)$ 作第一型多相分解：

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{00}(z^2) & E_{01}(z^2) \\ E_{10}(z^2) & E_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{E}(z^2) \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

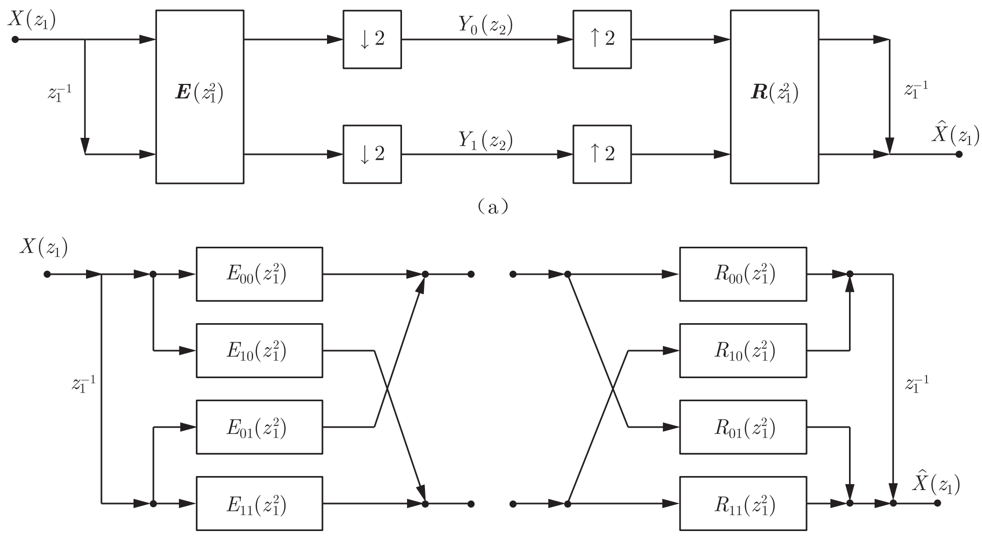
式中，$\boldsymbol{E}(z)$ 的第 k 行元素为 $H_k(z)$ 的多相成分，称 $\boldsymbol{E}(z)$ 为第一型多相矩阵。

类似地，对 $G_0(z)$、$G_1(z)$ 作第二型多相分解：

$$\begin{bmatrix} G_0(z) \\ G_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{00}(z^2) & R_{01}(z^2) \\ R_{10}(z^2) & R_{11}(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}(z^2) \begin{bmatrix} z^{-1} \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

注意 $\boldsymbol{R}(z)$ 带有一个转置符号①，故 $\boldsymbol{R}(z)$ 的第 k 列元素为 $G_k(z)$ 的多相成分，称 $\boldsymbol{R}(z)$ 为第二型多相矩阵。

根据上述关系，可以将两通道滤波器组转化为多相结构，如图 3.11（a）所示，其中，$\boldsymbol{E}(z)$、$\boldsymbol{R}(z)$ 的内部结构分别如图 3.11（b）、图 3.11（c）所示。



（a）

（b）$\boldsymbol{E}(z_1^2)$的内部结构　　（c）$\boldsymbol{R}(z_1^2)$的内部结构

图 3.11　两通道滤波器组的多相结构

注意到在图 3.11（a）所示的多相结构中，计算均是在高抽样率一侧进行的。根据第 2 章介绍的多抽样率网络的等效关系，可以将多相矩阵 $\boldsymbol{E}(z^2)$ 与 2 倍抽取交换，同时将多相矩阵 $\boldsymbol{R}(z^2)$ 与 2 倍内插交换，这样就得到了多相结构的高效实现，如图 3.12（a）所示。进一步，若不考虑分析端与综合端的中间处理过程，则可以将多相矩阵 $\boldsymbol{E}(z)$ 与 $\boldsymbol{R}(z)$ 视为一个整体，记

$$\boldsymbol{P}(z) = \boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{E}(z) \tag{3.4.3}$$

称 $\boldsymbol{P}(z)$ 为滤波器组的转移矩阵或传递矩阵（transfer matrix），该矩阵决定了滤波器组的传输特性，如图 3.12（b）所示。稍后会看到，$\boldsymbol{P}(z)$ 与 $T(z)$ 具有固定关系，通过恰当构造 $\boldsymbol{E}(z)$ 与 $\boldsymbol{R}(z)$，滤波器组就能够实现完全重构。

3.4.2　基于多相矩阵的完全重构条件

本节讨论基于多相矩阵的两通道滤波器组完全重构条件。两通道滤波器组的输入、输出关系为

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{2}X(z)[H_0(z)G_0(z) + H_1(z)G_1(z)]$$

① 稍后会看到，综合端多相矩阵加一个转置符号是为了便于推导。当然也可按照第一型多相矩阵方式定义，推导形式上有所区别。

$$+\frac{1}{2}X(-z)[H_0(-z)G_0(z)+H_1(-z)G_1(z)] \tag{3.4.4}$$

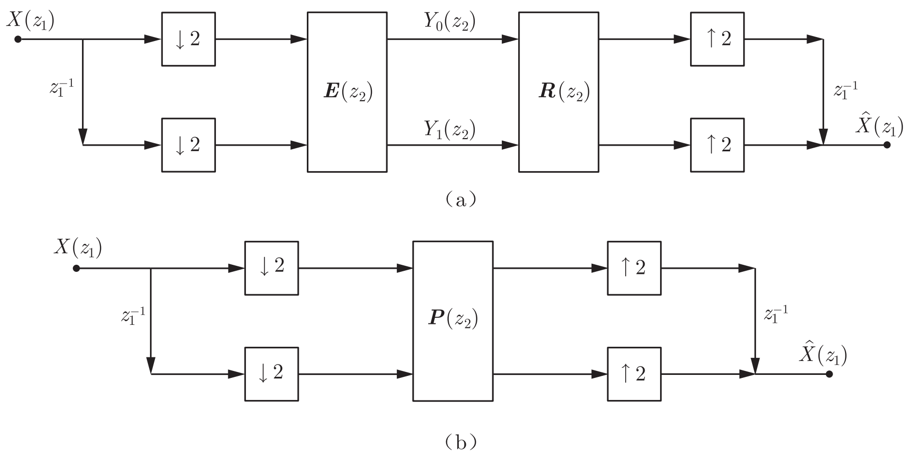


图 3.12　两通道滤波器组的多相结构（高效实现）

根据命题 3.2及其扩展形式，完全重构的充要条件为

$$\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2cz^{-n_0} & 0 \\ 0 & 2c(-z)^{-n_0} \end{bmatrix} \tag{3.4.5}$$

为了便于后续推导，这里将原式(3.2.20)等式两端都取了转置。

对 $H_0(z), H_1(z)$ 进行第一型多相分解，易知多相矩阵 $\boldsymbol{E}(z)$ 与调制矩阵 $\boldsymbol{H}(z)$ 具有如下关系：

$$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}(z)=\begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}=\boldsymbol{E}(z^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z^{-1} & -z^{-1} \end{bmatrix} \tag{3.4.6}$$

类似地，对 $G_0(z), G_1(z)$ 进行第二型多相分解，得

$$\boldsymbol{G}(z)=\begin{bmatrix} G_0(z) & G_1(z) \\ G_0(-z) & G_1(-z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \\ -z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{R}(z^2) \tag{3.4.7}$$

于是式(3.4.5)可以写作

$$\begin{bmatrix} z^{-1} & 1 \\ -z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{R}(z^2)\boldsymbol{E}(z^2)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z^{-1} & -z^{-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2cz^{-n_0} & 0 \\ 0 & 2c(-z)^{-n_0} \end{bmatrix} \tag{3.4.8}$$

不难验证，当 $\boldsymbol{E}(z), \boldsymbol{R}(z)$ 满足如下关系时：

$$\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{E}(z)=cz^{-\lambda}\boldsymbol{I},\ \lambda\in\mathbb{Z} \tag{3.4.9}$$

式(3.4.8)成立，此时 $n_0=2\lambda+1$。于是得到两通道滤波器组完全重构的充分条件。

命题 3.3 两通道滤波器组完全重构的充分条件为

$$\boldsymbol{P}(z)=\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{E}(z)=cz^{-\lambda}\boldsymbol{I} \tag{3.4.10}$$

式中，c 为非零常数；λ 为整数；$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵。

不妨结合系统框图来验证上述命题。事实上，当 $\boldsymbol{P}(z)=cz^{-\lambda}\boldsymbol{I}$ 时，其作用相当于一个延迟系统，如图 3.13所示。易知

$$\hat{X}_0(z_1)=V_0(z_2)=cz_2^{-\lambda}U_0(z_2)=\frac{1}{2}cz_1^{-2\lambda}\left[X(z_1)+X(-z_1)\right] \tag{3.4.11}$$

$$\hat{X}_1(z_1)=V_1(z_2)=cz_2^{-\lambda}U_1(z_2)=\frac{1}{2}cz_1^{-(2\lambda+1)}\left[X(z_1)-X(-z_1)\right] \tag{3.4.12}$$

于是

$$\hat{X}(z_1)=z_1^{-1}\hat{X}_0(z_1)+\hat{X}_1(z_1)=cz_1^{-(2\lambda+1)}X(z_1) \tag{3.4.13}$$

因此满足完全重构。

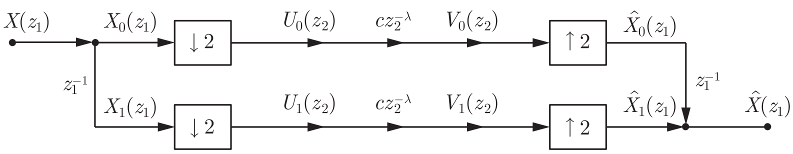


图 3.13 $\boldsymbol{P(z_2)=cz_2^{-\lambda}I}$ **时的滤波器组结构**

3.4.3 仿酉滤波器组的一般形式

命题 3.3给出了构造完全重构滤波器组的一般原则，即如果找到一对多相矩阵 $\boldsymbol{E}(z),\boldsymbol{R}(z)$ 满足式(3.4.10)，则该滤波器组必然满足完全重构。由于纯延迟 $cz^{-\lambda}$ 并不会影响完全重构的性质，因此为了便于分析，下面均假设 $cz^{-\lambda}=1$。此时完全重构条件可进一步简化为

$$\boldsymbol{R}(z)\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{I} \tag{3.4.14}$$

是否存在多相矩阵满足式(3.4.14)？如果存在，形式又是怎样的？关于这些问题，可以借助所谓的仿酉矩阵（paraunitary matrix）来解决。

定义 3.1 称矩阵 $\boldsymbol{E}(z)$ 为仿酉矩阵，如果

$$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)\boldsymbol{E}(z)=\boldsymbol{I} \tag{3.4.15}$$

式中，$\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 为 $\boldsymbol{E}(z)$ 的共轭转置矩阵①。特别地，若 $\boldsymbol{E}(z)$ 中的元素为实系数多项式，则 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}(z^{-1})$。

① 即对 $\boldsymbol{E}(z)$ 的元素取共轭后再转置。例如 $\boldsymbol{E}(z)=[a+bz^{-1},c+dz^{-1}]^{\mathrm{T}}$，则 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=[a^*+b^*z,c^*+d^*z], a,b,c,d\in\mathbb{C}$。

注意到当 $z=1$ 时，仿酉矩阵即为复数域上的酉矩阵。因此仿酉矩阵可视为酉矩阵在多项式域上的推广。仿酉矩阵具有如下性质。

命题 3.4　若 $\boldsymbol{E}(z)$ 为仿酉矩阵，则 $\det\boldsymbol{E}(z)=\pm z^{-n}$，其中，$n$ 为整数。

命题 3.5　若 $\boldsymbol{E}_1(z)$、$\boldsymbol{E}_2(z)$ 为仿酉矩阵，则 $\boldsymbol{E}_1(z)\boldsymbol{E}_2(z)$ 也是仿酉矩阵。

上述性质可通过仿酉矩阵的定义直接证明，具体证明过程留给读者。

联系式(3.4.14)，显然，若多相矩阵 $\boldsymbol{E}(z)$ 为仿酉矩阵，则可令 $\boldsymbol{R}(z)=\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)$，这样就找到了满足完全重构条件的一对多相矩阵。由仿酉矩阵构造的滤波器组称为仿酉滤波器组（paraunitary FB）或正交滤波器组（orthogonal FB）①。

那么 $\boldsymbol{E}(z)$ 和 $\boldsymbol{R}(z)$ 的具体形式是怎样的？下面进行详细分析。

设二通道分析滤波器组的多相矩阵为

$$\boldsymbol{E}(z)=\begin{bmatrix}E_{00}(z) & E_{01}(z)\\ E_{10}(z) & E_{11}(z)\end{bmatrix}\tag{3.4.16}$$

并假设它为仿酉矩阵。令综合滤波器组的多相矩阵为

$$\boldsymbol{R}(z)=\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_{00}(z) & \widetilde{E}_{10}(z)\\ \widetilde{E}_{01}(z) & \widetilde{E}_{11}(z)\end{bmatrix}\tag{3.4.17}$$

式中，$\widetilde{E}_{ij}(z)$ 表示 $E_{ij}(z)$ 的复共轭。特别地，若 $E_{ij}(z)$ 均为实系数多项式，则 $\widetilde{E}_{ij}(z)=E_{ij}(z^{-1})$。

另一方面，注意到 $\boldsymbol{E}(z)$ 可逆，故

$$\boldsymbol{E}^{-1}(z)=\frac{1}{\det\boldsymbol{E}}\begin{bmatrix}E_{11}(z) & -E_{01}(z)\\ -E_{10}(z) & E_{00}(z)\end{bmatrix}=\pm z^{n}\begin{bmatrix}E_{11}(z) & -E_{01}(z)\\ -E_{10}(z) & E_{00}(z)\end{bmatrix}\tag{3.4.18}$$

式中，$\pm z^n$ 是由 $\boldsymbol{E}(z)$ 的行列式引入的。

令 $\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\boldsymbol{E}^{-1}(z)$，对比式(3.4.17)与式(3.4.18)可知

$$\widetilde{E}_{00}(z)=\pm z^nE_{11}(z)\tag{3.4.19a}$$

$$\widetilde{E}_{10}(z)=\mp z^nE_{01}(z)\tag{3.4.19b}$$

$$\widetilde{E}_{01}(z)=\mp z^nE_{10}(z)\tag{3.4.19c}$$

$$\widetilde{E}_{11}(z)=\pm z^nE_{00}(z)\tag{3.4.19d}$$

将式(3.4.19a)与式(3.4.19c)代入式(3.4.16)，替换原有的 $E_{10}(z)$ 和 $E_{11}(z)$，可得

$$\boldsymbol{E}(z)=\begin{bmatrix}E_{00}(z) & E_{01}(z)\\ \mp z^{-n}\widetilde{E}_{01}(z) & \pm z^{-n}\widetilde{E}_{00}(z)\end{bmatrix}\tag{3.4.20}$$

① 这是因为仿酉矩阵也称为正交（orthogonal）矩阵，即矩阵的列向量是正交的。正交滤波器组的概念在小波分析理论中经常使用。事实上，离散小波变换与滤波器组具有密切联系，第 5 章将详细阐述。

上式说明，矩阵 $\boldsymbol{E}(z)$ 实际只由 $E_{00}(z)$、$E_{01}(z)$ 决定。

类似地，将式(3.4.19b)与式(3.4.19d)代入式(3.4.17)，替换原有的 $\widetilde{E}_{10}(z)$ 和 $\widetilde{E}_{11}(z)$，得

$$\boldsymbol{R}(z)=\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)=\begin{bmatrix}\widetilde{E}_{00}(z) & \mp z^{n}E_{01}(z)\\ \widetilde{E}_{01}(z) & \pm z^{n}E_{00}(z)\end{bmatrix} \tag{3.4.21}$$

同样发现，矩阵 $\boldsymbol{R}(z)$ 只由 $E_{00}(z)$、$E_{01}(z)$ 决定。事实上，利用 $\boldsymbol{R}(z)=\widetilde{\boldsymbol{E}}(z)$ 可得同样结果。

式(3.4.20)与式(3.4.21)给出了 $\boldsymbol{E}(z)$ 与 $\boldsymbol{R}(z)$ 为仿酉矩阵时的一般形式。注意到两者均是由多相分量 $E_{00}(z)$ 和 $E_{01}(z)$ 决定，这意味着所有滤波器均可以由分析端的低通滤波器 $H_0(z)$ 得到。下面推导仿酉滤波器组的一般形式。为了便于分析，以下假设滤波器均为实系数，则相应的多相矩阵也为实系数。因此式(3.4.20)与式(3.4.21)又可写作

$$\boldsymbol{E}(z)=\begin{bmatrix}E_{00}(z) & E_{01}(z)\\ \mp z^{-n}E_{01}(z^{-1}) & \pm z^{-n}E_{00}(z^{-1})\end{bmatrix} \tag{3.4.22}$$

$$\boldsymbol{R}(z)=\begin{bmatrix}E_{00}(z^{-1}) & \mp z^{n}E_{01}(z)\\ E_{01}(z^{-1}) & \pm z^{n}E_{00}(z)\end{bmatrix} \tag{3.4.23}$$

根据第一型多相分解，

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}H_0(z)\\ H_1(z)\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}(z^2)\begin{bmatrix}1\\ z^{-1}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}E_{00}(z^2) & E_{01}(z^2)\\ \mp z^{-2n}E_{01}(z^{-2}) & \pm z^{-2n}E_{00}(z^{-2})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ z^{-1}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}E_{00}(z^2)+z^{-1}E_{01}(z^2)\\ \mp z^{-2n}(E_{01}(z^{-2})-z^{-1}E_{00}(z^{-2}))\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.4.24}$$

由于

$$H_1(z)=\mp z^{-2n}(E_{01}(z^{-2})-z^{-1}E_{00}(z^{-2})) \tag{3.4.25}$$

故

$$H_1(-z^{-1})=\mp z^{2n}(E_{01}(z^2)+zE_{00}(z^2))=\mp z^{2n+1}H_0(z) \tag{3.4.26}$$

因此

$$H_1(z)=\pm z^{-(2n+1)}H_0(-z^{-1}) \tag{3.4.27}$$

于是得到 $H_1(z)$ 与 $H_0(z)$ 的关系，其中 $\pm$ 号及指数中的 n 均是由仿酉矩阵的行列式决定的。不难发现，上述关系与 CQFB 非常相似。事实上，CQFB 可视为仿酉滤波器组的一种特例①。

① 尽管 CQFB 是通过截然不同的方式分析得到的，但是由于仿酉滤波器组具有满足完全重构的一般形式，不难预见，CQFB 也必然满足仿酉滤波器组的一般形式。